W.7.3 Complementi sulla realizzazione di legami ingresso-uscita

W.7.3.1 Realizzazione minima diretta: metodo di Gilbert

Mentre con il metodo di Kalman descritto nel paragrafo 7.3.1 si ottiene una realizzazione minima indirettamente (ovvero costruendo una realizzazione non minima dalla quale si devono poi eliminare le parti irraggiungibili e/o inosservabili), il metodo di Gilbert consente di ottenere direttamente una realizzazione minima. Nella formulazione originale [15], tale metodo opera come descritto nel seguente Esempio W.7.3.1; prima dell'esempio è però opportuno richiamare alcuni concetti di algebra lineare.

Fattorizzazione di matrici.
Si consideri il problema di fattorizzare una data matrice $M \in \mathbb{R}^{a\times b}$ nella forma $M = FG$, con F e G matrici delle dimensioni "più piccole possibili". Si noti però che, affinché il prodotto FG sia possibile, occorre che il numero c di colonne di F sia pari al numero di righe di G; inoltre ovviamente il prodotto FG deve avere le stesse dimensioni di M, e quindi F deve avere a righe e G deve avere b colonne. Si supponga ora per assurdo che $M = FG$ con $c < r \triangleq \operatorname{rank}(M)$: in tal caso la seconda tra le disuguaglianze di Sylvester (7.3.14) implicherebbe in sequenza logica che

$$\operatorname{rank}(FG) \le \min\{\operatorname{rank}(F), \operatorname{rank}(G)\} \le c < r \implies \operatorname{rank}(FG) \ne \operatorname{rank}(M) \implies FG \ne M;$$

pertanto, deve essere $c \ge r$. Il seguente lemma mostra che $c = r$ è sufficiente.

Lemma W.7.3.1. *Sia $M \in \mathbb{R}^{a\times b}$, e $r = \operatorname{rank}(M)$. Esistono due matrici $F \in \mathbb{R}^{a\times r}$ e $G \in \mathbb{R}^{r\times b}$, con $\operatorname{rank}(F) = r$, tali che $M = FG$.*

Dimostrazione. Sia $F \in \mathbb{R}^{a\times r}$ una matrice le cui r colonne coincidano con r colonne linearmente indipendenti di M. Perciò, se si indica con m_i la colonna i-esima di M, per ogni $i = 1, \dots, b$ l'equazione $m_i = Fg_i$ ammette una (e una sola) soluzione nell'incognita $g_i \in \mathbb{R}^r$. La matrice $G \triangleq [g_1\, g_2\, \dots\, g_b]$ è perciò tale che $FG = M$. □

Il seguente lemma mostra inoltre che la fattorizzazione descritta nella dimostrazione del Lemma W.7.3.1 (o quella ottenuta mediante la successiva Procedura W.7.3.1) è sostanzialmente unica, nel senso che se F, G e $\bar{F}$, $\bar{G}$ sono due fattorizzazioni diverse (ma con le stesse dimensioni e con la dimensione interna, cioè comune, pari al rango di M) della stessa matrice M, allora esiste una matrice invertibile T tale che $F = \bar{F}T$ e $G = T^{-1}\bar{G}$.

Lemma W.7.3.2. *Se $M = FG = \bar{F}\bar{G}$, con $M \in \mathbb{R}^{a\times b}$, F, $\bar{F} \in \mathbb{R}^{a\times r}$, G, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{r\times b}$, e $r = \operatorname{rank}(M)$, allora:*
a) $\operatorname{rank}(F) = \operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(\bar{F}) = \operatorname{rank}(\bar{G}) = r$;
b) esiste $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ invertibile tale che $F = \bar{F}T$ e $G = T^{-1}\bar{G}$;
c) $\operatorname{Im}(F) = \operatorname{Im}(\bar{F})$, $\operatorname{Im}(G') = \operatorname{Im}(\bar{G}')$.

Dimostrazione. a) Si noti che per la seconda tra le disuguaglianze di Sylvester (7.3.14), il rango di F, G, $\bar{F}$ e $\bar{G}$ è maggiore o uguale al rango di $FG = \bar{F}\bar{G} = M$ (che è pari a r), e perciò (a motivo delle dimensioni di esse) è proprio pari a r.
b) Si mostrerà ora che valgono le relazioni $F = \bar{F}T$ e $\bar{G} = TG$ con $T \triangleq \bar{G}G^\sharp$, e che T è invertibile. Infatti postmoltiplicando la relazione $FG = \bar{F}\bar{G}$ per $G^\sharp$ si ottiene $F = \bar{F}\bar{G}G^\sharp = \bar{F}T$. Inoltre, ancora per la seconda disuguaglianza di Sylvester (7.3.14),

tenendo conto che $\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(\bar{F}T) = r$, si ha

$$r = \mathrm{rank}(\bar{F}T) \le \min(\mathrm{rank}(\bar{F}), \mathrm{rank}(T)) \le \mathrm{rank}(T),$$

e poiché $\mathrm{rank}(T) \le r$ (in quanto $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$), si deduce che $\mathrm{rank}(T) = r$ e quindi che T è invertibile. Inoltre dalle ipotesi e dalla relazione $F = \bar{F}T$ si ha infine:

$$\bar{F}\bar{G} = FG = \bar{F}TG,$$

e quindi $\bar{G} = TG$, per l'indipendenza lineare delle r colonne di $\bar{F}$.
c) Se $w \in \mathrm{Im}(\bar{F})$, allora esiste $\bar{v}$ tale che $w = \bar{F}\bar{v}$. Poiché $F = \bar{F}T$ e T è invertibile, il vettore $v \triangleq T^{-1}\bar{v}$ è ben definito e inoltre $Fv = \bar{F}TT^{-1}\bar{v} = \bar{F}\bar{v} = w$; pertanto $w \in \mathrm{Im}(F)$, ovvero $\mathrm{Im}(\bar{F}) \subset \mathrm{Im}(F)$. Invertendo i ruoli di F e $\bar{F}$ si mostra anche l'inclusione inversa, e quindi che $\mathrm{Im}(\bar{F}) = \mathrm{Im}(F)$. La prova che $\mathrm{Im}(G') = \mathrm{Im}(\bar{G}')$ è analoga. □

Corollario W.7.3.1. *Se $M = F\hat{M}G$ con $F \in \mathbb{R}^{a\times r_a}$, $G \in \mathbb{R}^{r_b\times b}$, $\mathrm{rank}(F) = r_a$, $\mathrm{rank}(G) = r_b$, $\mathrm{rank}(\hat{M}) \triangleq \hat{r}$, allora $\mathrm{rank}(M) = \hat{r}$ e per ogni fattorizzazione $M = \bar{F}\bar{G}$ di M con $\bar{F} \in \mathbb{R}^{a\times\bar{r}}$, $\bar{G} \in \mathbb{R}^{\bar{r}\times b}$, $\mathrm{rank}(\bar{F}) = \mathrm{rank}(\bar{G}) = \bar{r}$, si ha $\bar{r} = \hat{r}$, e inoltre $\mathrm{Im}(\bar{F}) \subset \mathrm{Im}(F)$, $\mathrm{Im}(\bar{G}') \subset \mathrm{Im}(G')$.*

Dimostrazione. Per il Lemma W.7.3.1 una fattorizzazione di M è data da $M = \bar{F}_0\bar{G}_0$, con $\bar{F}_0 = F\hat{F}$, $\bar{G}_0 = \hat{G}G$, $\hat{F}\hat{G} = \hat{M}$, $\mathrm{rank}(\hat{F}) = \mathrm{rank}(\hat{G}) = \hat{r}$ e $\hat{F} \in \mathbb{R}^{r_a\times\hat{r}}$, $\hat{G} \in \mathbb{R}^{\hat{r}\times r_b}$. Poiché per il Lemma W.7.3.2 le $\hat{r}$ colonne (righe) di $\hat{F}$ ($\hat{G}$) sono linearmente indipendenti, come le r_a colonne (le r_b righe) di F (G), ne segue che $F\hat{F}$, cioè $\bar{F}_0$ ($\hat{G}G$, cioè $\bar{G}_0$) ha le sue $\hat{r}$ colonne (righe) indipendenti, cioè ha rango $\hat{r}$. Perciò le disuguaglianze di Sylvester (7.3.14), applicate a $M = \bar{F}_0\bar{G}_0$, implicano che $\mathrm{rank}(M) = \hat{r}$; se invece sono applicate alla fattorizzazione $M = \bar{F}\bar{G}$ dell'enunziato implicano che $\mathrm{rank}(M) = \bar{r}$, dimostrando che $\bar{r} = \hat{r}$. Allora per il Lemma W.7.3.2, per tale fattorizzazione $M = \bar{F}\bar{G}$ risulta $\bar{F} = \bar{F}_0T = F\hat{F}T$, $\bar{G} = T^{-1}\bar{G}_0 = T^{-1}\hat{G}G$, con T invertibile; e ciò prova l'ultimo asserto. □

Il seguente algoritmo fornisce, in modo più diretto ed esplicito rispetto alla dimostrazione del Lemma W.7.3.1, una fattorizzazione $M = FG$ di M e con la dimensione interna, cioè comune, pari al rango di M, sfruttando, per il fattore F della fattorizzazione $M = FG$ di tale lemma, l'identità $FF^\sharp F = F$ e la sua implicazione $M = FG = FF^\sharp FG = FF^\sharp M = F\left(F^\sharp M\right)$.

Procedura W.7.3.1 (***Fattorizzazione*** $M = FG$ ***di*** $M \in \mathbb{R}^{a\times b}$ ***con il minimo numero di colonne di*** F)**.**
Passo 1. Scegli $F \in \mathbb{R}^{a\times r}$, con $r \triangleq \mathrm{rank}(M)$, in modo che $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(M)$ (ovvero, scegli le r colonne di F prendendo r colonne linearmente indipendenti di M).
Passo 2. Calcola $G \in \mathbb{R}^{r\times b}$ come $G \triangleq F^\sharp M$, dove $F^\sharp \triangleq (F'F)^{-1}F'$.

Osservazione W.7.3.1. Lo stesso tipo di algoritmo può essere applicato anche nel caso in cui $M \in \mathbb{C}^{a\times b}$ (ovvero se M ha elementi non reali, nel qual caso le matrici F e G risultano anch'esse ad elementi non reali) grazie a un lemma simile al Lemma W.7.3.1 ma con $M \in \mathbb{C}^{a\times b}$, $F \in \mathbb{C}^{a\times r}$, $G \in \mathbb{C}^{r\times b}$. Tuttavia in tal caso occorre definire la pseudoinversa di una matrice complessa $U \in \mathbb{C}^{a\times b}$ secondo la relazione

$$U^\sharp \triangleq \begin{cases} (U^HU)^{-1}U^H & \text{se } \mathrm{rank}(U) = b < a, \\ U^H(UU^H)^{-1} & \text{se } \mathrm{rank}(U) = a < b, \end{cases} \tag{W.7.3.1}$$

dove U^H indica la matrice trasposta e coniugata di U, ovvero $U^H \triangleq (U')^*$, e la matrice U^HU, o UU^H, risulta invertibile per un lemma analogo al Lemma 7.3.6 a pag. 421; grazie alla (W.7.3.1), la Procedura W.7.3.1, ma con F scelta in $\mathbb{C}^{a\times r}$ e G in $\mathbb{C}^{r\times b}$, resta valida per fattorizzare una $M \in \mathbb{C}^{a\times b}$ (ovviamente usando al

Passo 2 l'espressione di $F^\sharp$ desumibile dalla (W.7.3.1) anziché quella ivi indicata). Si noti che se U è reale la definizione (W.7.3.1) coincide con la (7.3.15), essendo la trasposta coniugata U^H coincidente con la semplice trasposta U' di U.

Si sottolinea inoltre che anche nel caso del Lemma W.7.3.2 e del Corollario W.7.3.1 valgono un lemma e un corollario simili, ma riferiti al caso in cui le matrici che compaiono nei relativi enunziati siano ad elementi non reali ma complessi. □

Esempio W.7.3.1. Si consideri il problema di trovare una realizzazione minima di

$$\boldsymbol{W}(\lambda) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda-5} & \dfrac{3(\lambda-1)}{(\lambda-5)(\lambda+1)} \\ \dfrac{3(\lambda-1)}{(\lambda-5)(\lambda+1)} & \dfrac{\lambda-1}{\lambda-5} \end{bmatrix}.$$

Come primo passo del metodo di Gilbert, si scompone $\boldsymbol{W}(\lambda)$ in frazioni parziali:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(\lambda) &= \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda-5}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda+1}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = D + \frac{1}{\lambda-5}M_1 + \frac{1}{\lambda+1}M_2 = \\ &= D + \boldsymbol{W_1}(\lambda) + \boldsymbol{W_2}(\lambda), \quad \boldsymbol{W_1}(\lambda) \triangleq \frac{1}{\lambda-5}M_1, \quad \boldsymbol{W_2}(\lambda) \triangleq \frac{1}{\lambda+1}M_2,\end{aligned}$$

dove $D = \lim_{\lambda\to\infty} \boldsymbol{W}(\lambda)$ e le matrici razionali $\boldsymbol{W_1}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_2}(\lambda)$ sono caratterizzate dall'avere ognuna un unico polo. Definiti $r_1 \triangleq \operatorname{rank}(M_1) = 1$ e $r_2 \triangleq \operatorname{rank}(M_2) = 2$, si determina una realizzazione minima $(A_1, B_1, C_1, 0)$ di ordine r_1 per $\boldsymbol{W_1}(\lambda)$ e una realizzazione minima $(A_2, B_2, C_2, 0)$ di ordine r_2 per $\boldsymbol{W_2}(\lambda)$ fattorizzando le matrici M_1 e M_2 secondo la Procedura W.7.3.1

$$M_1 = C_1 B_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \quad M_2 = C_2 B_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$

e definendo $A_1 = 5 \cdot I_{r_1}$, $A_2 = -1 \cdot I_{r_2}$. Per finire, si ottiene la realizzazione di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ come

$$A = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}. \quad \square$$

L'approccio usato nell'Esempio W.7.3.1 si può generalizzare a un'arbitraria matrice $\boldsymbol{W}(\lambda)$ razionale propria a coefficienti reali come descritto nella seguente Procedura W.7.3.2, il cui Passo 2 sarà ulteriormente dettagliato e specificato nelle pagine successive di questo paragrafo, mentre l'efficacia del Passo 3 per ottenere una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ è dimostrata dal successivo Lemma W.7.3.3.

Procedura W.7.3.2 (***Metodo di Gilbert per individuare una realizzazione minima di una matrice razionale propria $\boldsymbol{W}(\lambda)$ a coefficienti reali***)**.**
Passo 0. Calcola il numero complessivo dei poli reali distinti e delle coppie di poli complessi coniugati di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ e chiamalo $\overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}$.

Passo 1. Poni $D_0 \triangleq \lim_{\lambda\to\infty} \boldsymbol{W}(\lambda)$ e scomponi $\boldsymbol{W}(\lambda)$ come

$$\boldsymbol{W}(\lambda) = D_0 + \boldsymbol{W_1}(\lambda) + \cdots + \boldsymbol{W_{\overline{\nu}_W}}(\lambda) = D + \sum_{h=1}^{\overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}} \boldsymbol{W_h}(\lambda), \qquad \text{(W.7.3.2)}$$

dove ognuna delle $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ è strettamente propria e a coefficienti reali e ha un solo polo p_h reale oppure una sola coppia di poli complessi e coniugati (p_h, p_h^*).
Passo 2. Trova una realizzazione minima $(A_h, B_h, C_h, 0)$ di $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$, per tutti gli $h = 1, \ldots, \overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}$.
Passo 3. Determina la realizzazione complessiva (A, B, C, D) ponendo

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{\overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{\overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}} \end{bmatrix}, \qquad \text{(W.7.3.3a)}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_{\overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}} \end{bmatrix}, \qquad D = D_0. \qquad \text{(W.7.3.3b)}$$

La proprietà fondamentale sulla quale si basa la possibilità di ottenere (al Passo 3 della Procedura W.7.3.2) una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ come "parallelo" delle realizzazioni minime dei suoi termini relativi a poli reali distinti e a coppie distinte di poli complessi coniugati è espressa dal seguente lemma, la cui dimostrazione è immediata usando i PBH test di raggiungibilità e di osservabilità, grazie alla Proprietà 7.3.2 a pag. 428.

Lemma W.7.3.3. *Siano $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ due matrici razionali proprie di dimensioni $q\times p$. Se $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ non hanno poli in comune, (A_a, B_a, C_a, D_a) è una realizzazione minima di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e (A_b, B_b, C_b, D_b) è una realizzazione minima di $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$, allora*

$$A = \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_a & C_b \end{bmatrix}, D = D_a + D_b, \qquad \text{(W.7.3.4)}$$

è una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda) \triangleq \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$.

L'altro ingrediente fondamentale per il metodo di realizzazione di Gilbert consiste in un algoritmo per effettuare il Passo 2 della Procedura W.7.3.2, e cioè per trovare le realizzazioni minime $(A_h, B_h, C_h, 0)$ delle $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ strettamente proprie e a coefficienti reali nella (W.7.3.2) (per $h = 1, \ldots, \overline{\nu}_{\boldsymbol{W}}$). Nella versione originariamente proposta da Gilbert, si considera il solo caso di poli semplici e si sfrutta il seguente lemma (che giustifica l'approccio usato nell'Esempio W.7.3.1), ove I_r indica la matrice identità di dimensione r.

Lemma W.7.3.4. *Se* $\boldsymbol{W}(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\bar{p}}M$ *ha dimensioni* $q \times p$*, allora, posto* $r \triangleq \operatorname{rank}(M)$*, una realizzazione minima* $(A, B, C, 0)$ *di* $\boldsymbol{W}(\lambda)$ *è data da* $A \triangleq \bar{p} \cdot I_r$*, e* (B, C) *pari a una qualunque coppia di matrici di dimensioni* $r \times p$ *e* $q \times r$*, rispettivamente, tali che* $M = CB$ *e* $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$*.*

Dimostrazione. Poiché $A = \bar{p} \cdot I_r$, e (B, C) sono tali che $M = CB$, si trova immediatamente che

$$C(\lambda I - A)^{-1}B = C((\lambda - \bar{p})I)^{-1}B = \frac{1}{\lambda - \bar{p}}CB = \frac{1}{\lambda - \bar{p}}M = \boldsymbol{W}(\lambda),$$

e quindi $(A, B, C, 0)$ è una realizzazione di $\boldsymbol{W}(\lambda)$; circa la minimalità, essendo $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$ ed essendo A di dimensione r, i PBH test di raggiungibilità e di osservabilità sono banalmente soddisfatti. □

Osservazione W.7.3.2. Il Lemma W.7.3.4 riguarda (implicitamente) una $\boldsymbol{W}(\lambda)$ a coefficienti reali e perciò sottintende le ipotesi $\bar{p} \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Ma esso resta formalmente vero se (estendendo il problema della realizzazione e i relativi risultati a matrici $\boldsymbol{W}(\lambda)$ razionali proprie a coefficienti non reali e a quaterne (A, B, C, D) non reali e la teoria sviluppata nei Capitoli 5 e 6 a sistemi caratterizzati da matrici A, B, C, D e variabili $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ non reali, ciò che è formalmente immediato) si suppone più in generale $\bar{p} \in \mathbb{C}$ e $M \in \mathbb{C}^{q \times p}$. Allo stesso modo e per gli stessi motivi anche il Lemma W.7.3.3 (così come tutta la teoria sviluppata nel paragrafo 7.3), anch'esso implicitamente riferito a matrici $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ a coefficienti reali, resta formalmente vero se se ne estende l'enunziato a matrici $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ a coefficienti non reali e a loro "realizzazioni minime" costituite da quaterne di matrici non reali; e una simile affermazione vale per la Proprietà 7.3.2. □

Osservazione W.7.3.3. Il Passo 2 della Procedura W.7.3.2 può essere realizzato direttamente con l'ausilio del Lemma W.7.3.4 se i poli di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ sono tutti semplici (e reali); se però essi sono tutti semplici ma non sono tutti reali, grazie all'Osservazione W.7.3.2 si può cercare di combinare le due "realizzazioni minime" (con matrici A, B, C, D a elementi non reali, ottenute ancora con il Lemma W.7.3.4) relative a ciascuno dei due poli semplici complessi coniugati, in un'unica realizzazione minima (con matrici a elementi reali). Si supponga dunque che la matrice razionale propria $\boldsymbol{W}(\lambda)$ abbia elementi a coefficienti reali, e sia espressa da $\boldsymbol{W}(\lambda) = D + \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$, dove $D \triangleq \lim_{\lambda \to \infty} \boldsymbol{W}(\lambda)$, la matrice razionale strettamente propria $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ abbia il solo polo semplice $p_a = \alpha + \jmath\omega$ e la matrice razionale strettamente propria $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ abbia il solo polo semplice $p_b = p_a^* = \alpha - \jmath\omega$. Dal momento che $\boldsymbol{W}(\lambda)$ è a coefficienti reali, ed essendo $\boldsymbol{W_a}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - p_a}M_a$, per la Proprietà 2.4.9 a pag. 65 vale la relazione

$$\boldsymbol{W_b}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - p_b}M_b = \frac{1}{\lambda - p_a^*}M_a^*.$$

Perciò se $(A_a, B_a, C_a, 0)$ è una "realizzazione minima" di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$, e quindi $C_a(\lambda I - A_a)^{-1}B_a = \frac{1}{\lambda - p_a}M_a$, allora $C_a^*(\lambda I - A_a^*)^{-1}B_a^* = \frac{1}{\lambda - p_a^*}M_a^*$, ovvero $(A_b, B_b, C_b, 0) = (A_a^*, B_a^*, C_a^*, 0)$ è una "realizzazione" di $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$, anch'essa minima (dato che il soddisfacimento dei PBH test da parte della prima implica che anche la seconda li soddisfi); si noti che ciò implica che, nel caso di una coppia di poli complessi coniugati, basta effettuare il calcolo della realizzazione per uno solo dei due poli, cioè per $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$, potendosi poi ottenere la realizzazione di $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$, relativa al polo coniugato, semplicemente cambiando il segno della parte immaginaria degli elementi delle matrici che costituiscono la realizzazione già ottenuta. Se in particolare la realizzazione minima $(A_a, B_a, C_a, 0)$ di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ è stata ottenuta con l'ausilio del Lemma W.7.3.4, e quindi $A_a = p_a \cdot I_r$ con $r = \mathrm{rank}(M_a)$, allora una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ è data da

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \alpha I_r & -\omega I_r \\ \omega I_r & \alpha I_r \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{re}\,(B_a) \\ \mathrm{im}\,(B_a) \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.5a}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{re}\,(C_a) & -\mathrm{im}\,(C_a) \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = D = \lim_{\lambda \to \infty} \boldsymbol{W}(\lambda). \tag{W.7.3.5b}$$

Infatti, definendo

$$T = \begin{bmatrix} I_r & I_r \\ -\jmath I_r & \jmath I_r \end{bmatrix}$$

è immediato verificare che si ha

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_r & \jmath I_r \\ I_r & -\jmath I_r \end{bmatrix},$$

e che inoltre tra le matrici A, B e C definite dalle (W.7.3.4) e le matrici $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ definite dalle (W.7.3.5) valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} TAT^{-1} &= T \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_b \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & I_r \\ -\jmath I_r & \jmath I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r(\alpha + \jmath\omega) & 0 \\ 0 & I_r(\alpha - \jmath\omega) \end{bmatrix} T^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} I_r(\alpha + \jmath\omega) & I_r(\alpha - \jmath\omega) \\ I_r(\omega - \jmath\alpha) & I_r(\omega + \jmath\alpha) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_r & \jmath I_r \\ I_r & -\jmath I_r \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\,\alpha I_r & -2\,\omega I_r \\ 2\,\omega I_r & 2\,\alpha I_r \end{bmatrix} = \hat{A}, \\ TB &= T \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & I_r \\ -\jmath I_r & \jmath I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_a \\ B_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{re}\,(B_a) \\ 2\,\mathrm{im}\,(B_a) \end{bmatrix} = \hat{B}, \\ CT^{-1} &= \begin{bmatrix} C_a & C_b \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} C_a & C_a^* \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_r & \jmath I_r \\ I_r & -\jmath I_r \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{re}\,(C_a) & -2\,\mathrm{im}\,(C_a) \end{bmatrix} = \hat{C}. \end{aligned}$$

Poiché anche il Lemma W.7.3.3 (come rilevato nell'Osservazione W.7.3.2) resta formalmente vero se se ne estende l'enunziato a matrici $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ a coefficienti non reali e a loro "realizzazioni minime" costituite da matrici non reali, le relazioni precedenti mostrano che effettivamente le (W.7.3.5) forniscono una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda) = D + \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$, utilizzabile nel Passo 2 della Procedura W.7.3.2 per ogni h tale che $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ abbia una coppia di poli semplici complessi coniugati. Ciò completa la specificazione di tale passo per il caso di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ con poli tutti semplici. □

Per estendere al caso generale il metodo di Gilbert, perciò, occorre ancora indicare come la scelta di $(A_h, B_h, C_h, 0)$ al Passo 2 della Procedura W.7.3.2 possa essere effettuata nel caso di $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ avente un solo polo reale p_h, o una sola coppia di poli complessi coniugati $(p_h,\ p_h^*)$, ma con molteplicità maggiore di uno nel polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W_h}}(\lambda)$ di $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$. L'algoritmo corrispondente in tale caso al Passo 2 della Procedura W.7.3.2 sarà introdotto in modo progressivo, a cominciare dalla situazione più semplice. Inoltre si tratterà anzitutto il caso di un solo polo reale (ma con l'avvertenza che tutto quanto si esporrà in proposito potrà essere esteso direttamente all'individuazione di una "realizzazione minima" (non reale) di una $\boldsymbol{W}(\lambda)$ con un solo polo non reale con molteplicità maggiore di uno nel suo polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$, similmente a quanto già esplicitato nel caso di un solo polo semplice).

Si consideri dunque la seguente espressione della matrice di trasferimento $\boldsymbol{W}(\lambda)$ avente polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda) = (\lambda - \bar{p})^{\mu}$:

$$\boldsymbol{W}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - \bar{p})} M_1 + \frac{1}{(\lambda - \bar{p})^2} M_2 + \cdots + \frac{1}{(\lambda - \bar{p})^{\mu}} M_{\mu}, \tag{W.7.3.6}$$

ove $\bar{p}$, M_1, M_2, $\ldots$, M_{μ} si suppongono per ora reali. Posto $r \triangleq \operatorname{rank}(M_{\mu})$, affinché $\boldsymbol{W}(\lambda)$ ammetta una realizzazione minima della forma seguente[1]

$$A = \begin{bmatrix} \bar{p}I_r & I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}I_r & I_r & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{p}I_r & I_r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{p}I_r \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{\mu-1} \\ B_{\mu} \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.7a}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_{\mu-1} & C_{\mu} \end{bmatrix}, \qquad D = 0 \tag{W.7.3.7b}$$

(ove B_i ha r righe e C_i ha r colonne per ogni $i = 1, \ldots, \mu$), tenendo conto che si ha (come è facile verificare con lo stesso procedimento con cui si è ottenuta

[1] Confrontando la matrice A nella (W.7.3.7a) con la (3.3.19c), e ricordando le (3.3.26), non è difficile capire che tale matrice A, che ha il solo autovalore $\bar{p}$, ha una forma di Jordan caratterizzata da r blocchi di Jordan, tutti di dimensione μ, e ovviamente tutti relativi all'autovalore $\bar{p}$, individuando per A r catene di Jordan destre (o sinistre), di lunghezza μ, relative a tale autovalore. Perciò le (W.7.3.7), ove individuino una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, hanno il vantaggio di evidenziare gli aspetti menzionati della forma di Jordan della matrice A di essa (e perciò, per il Teorema 7.3.3 a pag. 423, anche della matrice A presente in una qualunque altra realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$).

la (3.3.42))

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda-\bar{p})} I_r & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})^2} I_r & \dots & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})^{\mu-1}} I_r & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})^{\mu}} I_r \\ 0 & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})} I_r & \dots & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})^{\mu-2}} I_r & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})^{\mu-1}} I_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})} I_r & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})^2} I_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{(\lambda-\bar{p})} I_r \end{bmatrix}, \quad \text{(W.7.3.8)}$$

è necessario che valgano le relazioni seguenti (ottenute uguagliando i coefficienti di uguali potenze negative di $(\lambda - \bar{p})$ in $C(\lambda I - A)^{-1}B + D$ e in $\boldsymbol{W}(\lambda)$):

$$M_{\mu-k} = C_1 B_{\mu-k} + \ldots + C_{1+k} B_\mu = \sum_{j=0}^{k} C_{1+j} B_{\mu-k+j}, \quad 0 \le k \le \mu - 1. \quad \text{(W.7.3.9)}$$

Peraltro le (W.7.3.9) (comprendenti in particolare per $k = 0$ la relazione $M_\mu = C_1 B_\mu$) sono anche sufficienti perché le (W.7.3.7) costituiscano una realizzazione della (W.7.3.6). Inoltre i PBH test di raggiungibilità e di osservabilità per le (W.7.3.7) sono soddisfatti se e solo se $\text{rank}(B_\mu) = \text{rank}(C_1) = r$; ma la relazione $M_\mu = C_1 B_\mu$ per la seconda delle (7.3.14) implica che $r \le \text{rank}(C_1)$ e $r \le \text{rank}(B_\mu)$, mentre l'ipotesi sulle dimensioni di C_1 e B_μ implica che $\text{rank}(C_1) \le r$ e $\text{rank}(B_\mu) \le r$. **Pertanto se le** (W.7.3.7) **costituiscono una realizzazione della** (W.7.3.6) **(ovvero se valgono le** (W.7.3.9)**) essa è certamente minima.**

Queste considerazioni dimostrano il seguente Lemma W.7.3.5, che si può usare al posto del Lemma W.7.3.4 per effettuare il Passo 2 della Procedura W.7.3.2 se $\bar{p}$, M_1, $M_2, \ldots$, M_μ sono reali e $r = p$ (e quindi dalla fattorizzazione $M_\mu = M_\mu I_p$ di M_μ si possono definire $C_1 = M_\mu$ e $B_\mu = I_p$ tali che $C_1 B_\mu = M_\mu$ e aventi le dimensioni necessarie) o $r = q$ (e quindi dalla fattorizzazione $M_\mu = I_q M_\mu$ di M_μ si possono definire $C_1 = I_q$ e $B_\mu = M_\mu$ tali che $C_1 B_\mu = M_\mu$ e aventi le dimensioni necessarie).

Lemma W.7.3.5. *Sia* $\boldsymbol{W}(\lambda)$ *espressa come nella* (W.7.3.6) *e* $r \triangleq \text{rank}(M_\mu)$. *Se* $r = \min\{p, q\}$, *una realizzazione minima di* $\boldsymbol{W}(\lambda)$ *è data dalle* (W.7.3.7) *con*

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = \ldots = B_{\mu-1} = 0_{p\times p},\ B_\mu = I_p, \\ C_h = M_{\mu-h+1},\ h = 1, 2, \ldots, \mu, \quad \textit{se } r = p; \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1 = I_q,\ C_2 = C_3 = \ldots = C_\mu = 0_{q\times q}, \\ B_h = M_h,\ h = 1, 2, \ldots, \mu, \quad \textit{se } r = q, \end{cases}$$

ove i simboli $0_{p\times p}$ *e* $0_{q\times q}$ *indicano matrici nulle di dimensioni* $p \times p$ *e* $q \times q$, *rispettivamente.*

Nel caso generale, se $r < \min\{p, q\}$, una realizzazione minima della (W.7.3.6) nella forma (W.7.3.7) può non esistere; infatti il seguente controesempio mostra che se $r < \min\{p, q\}$, le (W.7.3.9) per $k > 0$ possono non essere tutte soddisfacibili (pur essendo sempre soddisfacibile quella per $k = 0$ fattorizzando $M_\mu = C_1 B_\mu$ come nella Procedura W.7.3.1).

Esempio W.7.3.2. Si voglia trovare una realizzazione minima della matrice di trasferimento

$$\boldsymbol{W}(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-1)^3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{(\lambda-1)^2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{(\lambda-1)^3}M_3 + \frac{1}{(\lambda-1)^2}M_2 + \frac{1}{(\lambda-1)}M_1. \tag{W.7.3.10}$$

Se esistesse una realizzazione minima della forma (W.7.3.7), per le (W.7.3.9) si dovrebbe avere

$$M_3 = C_1 B_3, \quad M_2 = C_1 B_2 + C_2 B_3, \quad M_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3. \tag{W.7.3.11}$$

Si rileva che $r \triangleq \operatorname{rank}(M_3) = 1$. Poi dalla prima relazione ($M_3 = C_1 B_3$) si deduce che:

$$C_1 = \begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix}a^{-1} & 0\end{bmatrix}, \quad a \neq 0; \tag{W.7.3.12}$$

fissati tali valori per C_1 e B_3, la seconda relazione ($M_2 = C_1 B_2 + C_2 B_3$) impone per C_2 e B_2 i valori seguenti:

$$C_2 = \begin{bmatrix}0\\ a\end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix}0 & a^{-1}\end{bmatrix}, \tag{W.7.3.13}$$

e quindi la terza relazione ($M_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3$) risulta impossibile da soddisfare, in quanto posti $B_1 = \begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}$ e $C_3 = \begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}'$ si ha

$$C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3 = \begin{bmatrix}a\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a^{-1} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}* & *\\ * & 1\end{bmatrix} \neq 0 = M_1, \tag{W.7.3.14}$$

dove $*$ indica elementi la cui espressione non interessa (in quanto ininfluente sul risultato da mostrare). Si noti che il problema indicato è in una certa misura inaspettato, in quanto si presenta nella relazione che riguarda $M_1 = 0$ per l'impossibilità di soddisfare la relazione $M_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3$ con C_1, B_3 fissati dalla fattorizzazione di M_3 come $M_3 = C_1 B_3$, anche se sembra che M_1 "non contenga cose in più rispetto a M_3" (in particolare, $\operatorname{Im}(M_1) \subset \operatorname{Im}(M_3)$). Riflettendo sull'origine del problema, si intuisce che esso è legato al fatto che $\operatorname{Im}(M_2) \not\subset \operatorname{Im}(C_1)$ e $\operatorname{Im}(M_2') \not\subset \operatorname{Im}(B_3')$, e quindi per imporre che $M_2 = C_1 B_2 + C_2 B_3$ occorre scegliere B_2 e C_2 con la seconda componente non nulla, e ciò fa sì che nel prodotto $C_2 B_2$ nella relazione $M_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3$ appaia l'elemento non nullo in posizione $(2, 2)$. D'altro canto, si noti pure che le condizioni $\operatorname{Im}(M_2) \not\subset \operatorname{Im}(C_1)$ e $\operatorname{Im}(M_2') \not\subset \operatorname{Im}(B_3')$ (o la condizione $\operatorname{Im}(M_2) \not\subset \operatorname{Im}(M_3)$) non implicano di per sé che sia impossibile soddisfare la relazione $M_1 = C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3$; infatti per la matrice di trasferimento

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda) &= \frac{1}{(\lambda-1)^3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{(\lambda-1)^2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{(\lambda-1)}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(\lambda-1)^3}M_3 + \frac{1}{(\lambda-1)^2}M_2 + \frac{1}{(\lambda-1)}M_1\end{aligned}$$

(avente le stesse M_3 e M_2 della matrice di trasferimento $\boldsymbol{W}(\lambda)$) si possono soddisfare le (W.7.3.11) scegliendo $C_3 = 0$, $B_1 = 0$ e le stesse B_2, B_3, C_2 e C_1 già scelte per $\boldsymbol{W}(\lambda)$. □

Il fatto che nel caso in cui $r < \min\{p, q\}$ le (W.7.3.9) possano non essere soddisfacibili per $k > 0$ suggerisce di introdurre dei termini di "resto" $R_{\mu-k}$ in modo da sostituire le (W.7.3.9) con le seguenti

$$M_\mu = C_1 B_\mu, \qquad M_{\mu-k} = \sum_{j=0}^{k} C_{1+j} B_{\mu-k+j} + R_{\mu-k}, \quad 1 \le k \le \mu - 1; \tag{W.7.3.15}$$

naturalmente tali termini di "resto" dovranno essere legati a un'opportuna modifica delle (W.7.3.7), che sarà introdotta successivamente, perché (dopo la modifica) costituiscano effettivamente una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$. Una prima osservazione utile per risolvere le (W.7.3.15) consiste nel notare che, benché complessivamente le (W.7.3.15) siano nonlineari nelle incognite C_h, B_h, $h = 1, \ldots, \mu$, se si sceglie una via iterativa per risolverle, e si parte dalla relazione per $k = 0$ fattorizzando M_μ secondo la relazione $M_\mu = C_1 B_\mu$ (vedi Procedura W.7.3.1), la (W.7.3.15) per $k = 1$ è lineare nelle incognite C_2, $B_{\mu-1}$ e $R_{\mu-1}$:

$$M_{\mu-1} = C_1 B_{\mu-1} + C_2 B_\mu + R_{\mu-1},$$

e, analogamente, fissate da tale relazione le incognite C_2, $B_{\mu-1}$ e $R_{\mu-1}$, la successiva relazione (W.7.3.15) per $k = 2$ è lineare nelle incognite C_3, $B_{\mu-2}$ e $R_{\mu-2}$, e così via. Pertanto, conviene definire

$$N_{\mu-1} \triangleq M_{\mu-1}, \qquad N_{\mu-k} \triangleq M_{\mu-k} - \sum_{j=1}^{k-1} C_{1+j} B_{\mu-k+j}, \; 1 < k < \mu, \tag{W.7.3.16}$$

e riscrivere le (W.7.3.15) nella forma seguente, in cui sono poste in evidenza le incognite C_{1+k}, $B_{\mu-k}$ e $R_{\mu-k}$, mentre $N_{\mu-k}$ ingloba tutti i termini che, utilizzando il metodo iterativo qui suggerito, sono già fissati quando si giunge a risolvere la (W.7.3.15) corrispondente a un dato k:

$$R_{\mu-k} + C_1 B_{\mu-k} + C_{1+k} B_\mu = N_{\mu-k}, \quad 1 \le k < \mu. \tag{W.7.3.17}$$

Una seconda osservazione, utile per la risoluzione delle (W.7.3.17) (e perciò delle (W.7.3.15)) consiste nell'introdurre una trasformazione preliminare grazie alla quale è possibile ottenere immediatamente una soluzione delle (W.7.3.17). Come si vedrà, la matrice $\boldsymbol{W}(\lambda)$, che si suppone espressa dalla (W.7.3.6), è sempre esprimibile anche nella seguente forma fattorizzata:

$$\boldsymbol{W}(\lambda) = U_0 \hat{\boldsymbol{W}}(\lambda) V_0 \tag{W.7.3.18}$$

con U_0, V_0' matrici di rango pari al numero delle rispettive colonne (si noti che, ove non già individuate diversamente, le matrici U_0 e V_0 nella (W.7.3.18) possono essere semplicemente $U_0 = I_q$ e $V_0 = I_p$). Sulla base di ciò e di una fattorizzazione $M_\mu = C_1 B_\mu$ di M_μ con il numero minimo di colonne di

C_1 secondo la Procedura W.7.3.1, la trasformazione considerata consiste nel portare $\boldsymbol{W}(\lambda)$ nella forma seguente:

$$\boldsymbol{W}(\lambda) = U\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)V, \tag{W.7.3.19}$$

dove U e V sono matrici le cui dimensioni sono le stesse di U_0 e V_0, rispettivamente, ma, come ora si mostrerà, sono espresse da

$$U = \begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} B_\mu \\ V_1 \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.20}$$

con U_1, V_1' matrici di rango pari al numero delle rispettive colonne scelte in modo tale che

$$\mathrm{Im}(U) = \mathrm{Im}(U_0), \tag{W.7.3.21a}$$
$$\mathrm{Im}(V') = \mathrm{Im}(V_0') \tag{W.7.3.21b}$$

(e perciò tali che anche U e V' abbiano tutte le colonne indipendenti). Infatti, per le (W.7.3.6) e (W.7.3.18) esiste $\hat{M}_\mu$ tale che $U_0\hat{M}_\mu V_0 = M_\mu$ e quindi tale che $U_0\hat{M}_\mu V_0 = C_1 B_\mu$. Perciò, per il Corollario W.7.3.1 si ha che $\mathrm{Im}(C_1) \subset \mathrm{Im}(U_0)$ e $\mathrm{Im}(B_\mu') \subset \mathrm{Im}(V_0')$, e quindi è possibile definire le due matrici U, V come nelle (W.7.3.20), con le stesse dimensioni di U_0 e V_0, rispettivamente, e tali che valgano le (W.7.3.21).[2] In base alle (W.7.3.21a) e (W.7.3.21b), esistono due matrici quadrate e invertibili T_y, T_u, tali che

$$U_0 = UT_y, \qquad V_0 = T_u V,$$

e quindi tali che valga la (W.7.3.19) con $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda) = T_y\hat{\boldsymbol{W}}(\lambda)T_u$.

Si vuole ora mostrare che tramite la $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ è particolarmente semplice ottenere una soluzione delle (W.7.3.17) (e quindi delle (W.7.3.15)). Si operi su $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ come fatto su $\boldsymbol{W}(\lambda)$ per ottenere le (W.7.3.17), a partire da un'espressione di $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ simile alla (W.7.3.6) e da un "tentativo" di realizzazione minima di $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ simile alle (W.7.3.7), indicando con $\bar{M}_h$, $h = 1, 2, \dots, \mu$, e con $\bar{R}_h$, $\bar{N}_h$, $h = 1, 2, \dots, \mu - 1$, i coefficienti matriciali ottenuti in tal modo, ma relativi a $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$, e con $\bar{B}_h$ e $\bar{C}_h$ ($h = 1, 2, \dots, \mu$) i blocchi corrispondenti ai blocchi B_h e C_h presenti nelle (W.7.3.7). Sulla base della (W.7.3.6), della simile espressione di $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$, delle (W.7.3.19) e (W.7.3.20) e della fattorizzazione $M_\mu = C_1 B_\mu$ di M_μ risulta necessariamente

$$C_1 B_\mu = U\bar{M}_\mu V = \begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,11} & \bar{M}_{\mu,12} \\ \bar{M}_{\mu,21} & \bar{M}_{\mu,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\mu \\ V_1 \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.22}$$

[2] La scelta di U_1, V_1' può essere fatta in maniera molto semplice; ad esempio, si può formare U_1 selezionando da U_0 un sottoinsieme di colonne in numero pari al numero di colonne di U_0 meno il numero di colonne di C_1, scegliendole in modo tale che $\mathrm{rank}(\begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix}) = \mathrm{rank}(C_1) + \mathrm{rank}(U_1)$ (un discorso analogo vale per la scelta di V_1' da V_0').

ove $\bar{M}_\mu$ è stata partizionata in modo coerente con le partizioni (W.7.3.20) di U e V. Poiché nell'ultimo membro della (W.7.3.22) le colonne di $\begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix}$ sono per ipotesi tutte linearmente indipendenti, l'uguaglianza con il primo membro implica che la matrice $\begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,21} & \bar{M}_{\mu,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\mu \\ V_1 \end{bmatrix}$ sia nulla; poiché per ipotesi tutte le righe di $\begin{bmatrix} B_\mu \\ V_1 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $\begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,21} & \bar{M}_{\mu,22} \end{bmatrix} = 0$. Inoltre un ragionamento analogo, basato sul fatto che nell'ultimo membro della (W.7.3.22) le righe di $\begin{bmatrix} B_\mu \\ V_1 \end{bmatrix}$ sono tutte linearmente indipendenti e ancora sull'uguaglianza con il primo membro, mostra che la matrice $\begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,12} \\ \bar{M}_{\mu,22} \end{bmatrix}$ è nulla, e che perciò anche $\bar{M}_{\mu,12}$ è nulla, come $\bar{M}_{\mu,22}$ (per quanto già detto). Pertanto la (W.7.3.22) si riduce a

$$C_1 B_\mu = \begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\mu \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_{\mu,11} B_\mu \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \bar{M}_{\mu,11} B_\mu, \tag{W.7.3.23}$$

ove C_1 e B_μ hanno per ipotesi le r righe e le r colonne, rispettivamente (dove r è il rango di M_μ), tutte linearmente indipendenti (cfr Lemma W.7.3.2). Perciò premoltiplicando il primo e l'ultimo membro della (W.7.3.23) per $C_1^\sharp$ e postmoltiplicandoli per $B_\mu^\sharp$ si ha

$$C_1^\sharp C_1 B_\mu B_\mu^\sharp = I_r = C_1^\sharp C_1 \bar{M}_{\mu,11} B_\mu B_\mu^\sharp = \bar{M}_{\mu,11}.$$

Perciò in definitiva si ha

$$\bar{M}_\mu = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}.$$

Si è così mostrato, come passo preliminare, che con le notazioni adottate, per la $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ già definita la matrice $\bar{M}_\mu$ può essere fattorizzata come $\bar{M}_\mu = \bar{C}_1 \bar{B}_\mu$ con $\bar{C}_1 = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\bar{B}_\mu = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$.

Ora si partizionino le matrici $\bar{M}_{\mu-k}$, $\bar{R}_{\mu-k}$, $\bar{N}_{\mu-k}$, e le matrici $\bar{C}_{1+k}$, $\bar{B}_{\mu-k}$, $k = 1, 2, \ldots, \mu-1$, in maniera conforme alle partizioni di $\bar{C}_1$ e $\bar{B}_\mu$, indicando i blocchi corrispondenti nel modo appresso indicato:

$$\bar{B}_{\mu-k} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{B}_{\mu-k,1} & \bar{B}_{\mu-k,2} \end{bmatrix}, \qquad \bar{C}_{1+k} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{C}_{1+k,1} \\ \bar{C}_{1+k,2} \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.24a}$$

$$\bar{R}_{\mu-k} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{R}_{\mu-k,11} & \bar{R}_{\mu-k,12} \\ \bar{R}_{\mu-k,21} & \bar{R}_{\mu-k,22} \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_{\mu-k} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{N}_{\mu-k,11} & \bar{N}_{\mu-k,12} \\ \bar{N}_{\mu-k,21} & \bar{T}_{\mu-k,22} \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.24b}$$

$$k = 1, 2, \ldots, \mu - 1,$$

tra esse valgono relazioni del tutto simili alle (W.7.3.17) se e solo se

$$\begin{bmatrix} \bar{R}_{\mu-k,11} & \bar{R}_{\mu-k,12} \\ \bar{R}_{\mu-k,21} & \bar{R}_{\mu-k,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{\mu-k,1} + \bar{C}_{1+k,1} & \bar{B}_{\mu-k,2} \\ \bar{C}_{1+k,2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{\mu-k,11} & \bar{N}_{\mu-k,12} \\ \bar{N}_{\mu-k,21} & \bar{N}_{\mu-k,22} \end{bmatrix},$$
$$k = 1, 2, \ldots, \mu - 1. \tag{W.7.3.25}$$

È immediato risolvere le (W.7.3.25) in modo iterativo per $k = 1, \ldots, \mu-1$, ricavando il valore delle incognite $\bar{B}_{\mu-k,1}$, $\bar{B}_{\mu-k,2}$, $\bar{C}_{1+k,1}$, $\bar{C}_{1+k,2}$, $\bar{R}_{\mu-k,11}$, $\bar{R}_{\mu-k,12}$, $\bar{R}_{\mu-k,21}$, $\bar{R}_{\mu-k,22}$ a partire dal termine noto $\bar{N}_{\mu-k}$ calcolato al passo precedente mediante le relazioni (simili alle (W.7.3.16))

$$\bar{N}_{\mu-1} \triangleq \bar{M}_{\mu-1}, \qquad \bar{N}_{\mu-k} \triangleq \bar{M}_{\mu-k} - \sum_{j=1}^{k-1} \bar{C}_{1+j} \bar{B}_{\mu-k+j}, \; k = 2, \ldots, \mu - 1, \tag{W.7.3.26}$$

semplicemente ponendo:

$$\bar{R}_{\mu-k,11} = 0, \qquad \bar{R}_{\mu-k,12} = 0, \qquad \bar{R}_{\mu-k,21} = 0, \tag{W.7.3.27a}$$
$$\bar{R}_{\mu-k,22} = \bar{N}_{\mu-k,22}, \quad \bar{B}_{\mu-k,2} = \bar{N}_{\mu-k,12}, \quad \bar{C}_{1+k,2} = \bar{N}_{\mu-k,21} \tag{W.7.3.27b}$$
$$\bar{B}_{\mu-k,1} + \bar{C}_{1+k,1} = \bar{N}_{\mu-k,11}, \tag{W.7.3.27c}$$

dove la (W.7.3.27a) fissa a zero i blocchi “non strettamente necessari” di $\bar{R}_{\mu-k}$, quindi la (W.7.3.27b) fissa univocamente $\bar{R}_{\mu-k,22}$, $\bar{B}_{\mu-k,2}$ e $\bar{C}_{1+k,2}$, e infine la (W.7.3.27c) mostra che ci sono in generale infinite scelte possibili per $\bar{B}_{\mu-k,1}$ e $\bar{C}_{1+k,1}$, con l'unico vincolo che la somma sia pari a $\bar{N}_{\mu-k,11}$ (come si mostrerà, ognuna di tali possibili infinite scelte conduce comunque ad ottenere una realizzazione minima della matrice di trasferimento assegnata). Una volta ottenute quindi le matrici $\bar{C}_{1+h}$, $\bar{B}_h$, $\bar{R}_h$, $h = 1, 2, \ldots, \mu - 1$ (dalle matrici $\bar{C}_1$ e $\bar{B}_\mu$ già esplicitate), che risolvono le (W.7.3.25), grazie alle (W.7.3.19), (W.7.3.20) è immediato vedere che, in corrispondenza, si ha una soluzione delle (W.7.3.17) espressa da

$$C_{1+h} = U\bar{C}_{1+h}, \qquad B_h = \bar{B}_h V, \qquad h = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \tag{W.7.3.28a}$$
$$R_{\mu-h} = U\bar{R}_{\mu-h}V = U_1 \bar{R}_{\mu-h,22} V_1, \qquad h = 1, 2, \ldots, \mu - 1. \tag{W.7.3.28b}$$

Nel caso in cui $r = \min\{p, q\}$, la seconda riga a blocchi o la seconda colonna a blocchi nelle (W.7.3.25) è assente, e quindi in particolare è assente il blocco $\bar{R}_{\mu-h,22} = \bar{N}_{\mu-h,22}$ e la (W.7.3.28b) va sostituita con la relazione $R_{\mu-h} = 0$, $h = 1, 2, \ldots, \mu-1$ (ma in tale caso si può applicare direttamente il Lemma W.7.3.5); invece nel caso in cui $r < \min\{p, q\}$, quanto precede dà luogo alla seguente procedura, la cui efficacia sarà dimostrata con il successivo Teorema W.7.3.1.

Procedura W.7.3.3. ***(Calcolo di una realizzazione minima*** $(A, B, C, 0)$ ***di una matrice razionale*** $\boldsymbol{W}(\lambda)$ ***strettamente propria, di dimensioni*** $q\times p$***, espressa dalla*** (W.7.3.6)***, con*** $\mu > 1$***,*** $M_\mu \neq 0$ ***e*** $\operatorname{rank} M_\mu < \min\{p, q\}$***.)***

Passo 1. Poni $l := 0$, $U_0 := I_q$, $V_0 := I_p$, $\hat{\boldsymbol{W}}(\lambda) := \boldsymbol{W}(\lambda)$ e $\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda) := \boldsymbol{W}(\lambda) = U_0\hat{\boldsymbol{W}}(\lambda)V_0$.
Passo 2. Chiama $\tilde{\mu}$ la molteplicità massima dell'unico polo $\bar{p}$ di $\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda)$. Decomponi $\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ nella somma dei seguenti $\tilde{\mu}$ termini:

$$\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda) = \frac{\tilde{M}_1}{(\lambda - \bar{p})} + \frac{\tilde{M}_2}{(\lambda - \bar{p})^2} + \cdots + \frac{\tilde{M}_{\tilde{\mu}}}{(\lambda - \bar{p})^{\tilde{\mu}}}, \tag{W.7.3.29}$$

e poni $\tilde{r} := \operatorname{rank}(\tilde{M}_{\tilde{\mu}})$.
Passo 3. Fattorizza $\tilde{M}_{\tilde{\mu}}$ nel modo seguente:

$$\tilde{M}_{\tilde{\mu}} = \tilde{C}_1\tilde{B}_{\tilde{\mu}},$$

con $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{q\times\tilde{r}}$, $\tilde{B}_{\tilde{\mu}} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}\times p}$ (e quindi $\operatorname{rank}(\tilde{C}_1) = \operatorname{rank}(\tilde{B}_{\tilde{\mu}}) = \operatorname{rank}(\tilde{M}_{\tilde{\mu}}) = \tilde{r}$).
Passo 4. Seleziona da U_0 e da V_0' delle colonne con cui formare, rispettivamente, due matrici U_1 e V_1' tali che le matrici

$$U := \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & U_1 \end{bmatrix}, \quad V := \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\tilde{\mu}} \\ V_1 \end{bmatrix} \tag{W.7.3.30}$$

abbiano, rispettivamente, le stesse dimensioni di U_0 e V_0, e inoltre

$$\operatorname{Im}(U) = \operatorname{Im}(U_0), \tag{W.7.3.31a}$$
$$\operatorname{Im}(V') = \operatorname{Im}(V_0') \tag{W.7.3.31b}$$

(implicando perciò che le matrici U_1, U, V_1' e V' abbiano rango colonna pieno, cioè rango pari al numero delle rispettive colonne).
Passo 5. Poni

$$T_y := U^\sharp U_0, \qquad T_u := V_0 V^\sharp, \qquad \bar{\boldsymbol{W}}(\lambda) := T_y\hat{\boldsymbol{W}}(\lambda)T_u,$$

e decomponi $\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ nella somma dei seguenti $\tilde{\mu}$ termini:

$$\bar{\boldsymbol{W}}(\lambda) = \frac{\bar{M}_1}{(\lambda - \bar{p})} + \frac{\bar{M}_2}{(\lambda - \bar{p})^2} + \cdots + \frac{\bar{M}_{\tilde{\mu}}}{(\lambda - \bar{p})^{\tilde{\mu}}}. \tag{W.7.3.32}$$

Passo 6. Poni $\bar{C}_1 := \begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_{\tilde{\mu}} := \begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix}$, $h := \tilde{\mu} - 1$, $\bar{N}_h := \bar{M}_h$, e decomponi in blocchi come segue $\bar{N}_h$:

$$\bar{N}_h = \begin{bmatrix} \bar{N}_{h,11} & \bar{N}_{h,12} \\ \bar{N}_{h,21} & \bar{N}_{h,22} \end{bmatrix},$$

ove $\bar{N}_{h,11} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}\times\tilde{r}}$.
Passo 7. Scegli $\bar{B}_{h,1} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}\times\tilde{r}}$, $\bar{B}_{h,2}$, $\bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h),1} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}\times\tilde{r}}$, $\bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h),2}$, $\bar{R}_{h,22}$ tali che

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{h,1} + \bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h),1} & \bar{B}_{h,2} \\ \bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h),2} & \bar{R}_{h,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{h,11} & \bar{N}_{h,12} \\ \bar{N}_{h,21} & \bar{N}_{h,22} \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.33}$$

e poni $\bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h)} := \begin{bmatrix} \bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h),1} \\ \bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h),2} \end{bmatrix}$ e $\bar{B}_h := \begin{bmatrix} \bar{B}_{h,1} & \bar{B}_{h,2} \end{bmatrix}$.
Passo 8. Se $h = 1$, vai al passo 9; altrimenti (se $h > 1$), poni $h := h - 1$, e quindi poni

$$\bar{N}_h := \bar{M}_h - \sum_{j=1}^{(\tilde{\mu}-h)-1} \bar{C}_{1+j}\bar{B}_{h+j},$$

e decomponi in blocchi come segue $\bar{N}_h$:

$$\bar{N}_h = \begin{bmatrix} \bar{N}_{h,11} & \bar{N}_{h,12} \\ \bar{N}_{h,21} & \bar{N}_{h,22} \end{bmatrix},$$

ove $\bar{N}_{h,11} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}\times\tilde{r}}$, e torna al Passo 7.
Passo 9. Poni

$$\tilde{B}_h := \bar{B}_h V, \qquad h = 1, 2, \dots, \tilde{\mu} - 1, \tag{W.7.3.34a}$$
$$\tilde{C}_h := U\bar{C}_h, \qquad h = 2, 3, \dots, \tilde{\mu}, \tag{W.7.3.34b}$$
$$\tilde{R}_{\tilde{\mu}-h} := U_1\bar{R}_{\tilde{\mu}-h,22}V_1, \qquad h = 1, 2, \dots, \tilde{\mu} - 1. \tag{W.7.3.34c}$$

Poni inoltre

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} \bar{p}I_{\tilde{r}} & I_{\tilde{r}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}I_{\tilde{r}} & I_{\tilde{r}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{p}I_{\tilde{r}} & I_{\tilde{r}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{p}I_{\tilde{r}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B} := \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \vdots \\ \tilde{B}_{\tilde{\mu}-1} \\ \tilde{B}_{\tilde{\mu}} \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.35a}$$
$$\tilde{C} := \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \tilde{C}_3 & \dots & \tilde{C}_{\tilde{\mu}-1} & \tilde{C}_{\tilde{\mu}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{D} := 0. \tag{W.7.3.35b}$$

Passo 10. Se $l = 0$ allora poni $A := \tilde{A}$, $B := \tilde{B}$, $C := \tilde{C}$, $D := 0$; altrimenti poni

$$A := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ \tilde{B} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C & \tilde{C} \end{bmatrix}, \quad D = 0. \tag{W.7.3.36}$$

Passo 11. Se $\tilde{R}_h = 0$, $h = 1, \dots, \tilde{\mu} - 1$, allora STOP; altrimenti, chiama $\tilde{\nu}$ il massimo indice h tale che $\tilde{R}_h \neq 0$.

Passo 12. Poni $l := l + 1$. Se $\tilde{\nu} = 1$, poni $\tilde{r} := \operatorname{rank}(\tilde{R}_1)$, $\tilde{\mu} := 1$, trova $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{q\times\tilde{r}}$ e $\tilde{B}_{\tilde{\mu}} \in \mathbb{R}^{\tilde{r}\times p}$ tali che $\tilde{R}_1 = \tilde{C}_1\tilde{B}_{\tilde{\mu}}$, e poni $\tilde{A} := \bar{p}I_{\tilde{r}}$, $\tilde{B} := \tilde{B}_{\tilde{\mu}}$ e $\tilde{C} := \tilde{C}_1$; quindi poni

$$A := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ \tilde{B}_{\tilde{\mu}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C & \tilde{C}_1 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \tag{W.7.3.37}$$

e STOP; altrimenti (se $\tilde{\nu} > 1$), poni $U_0 := U_1$, $V_0 := V_1$, $\hat{R}_h := \bar{R}_{h,22}$, $h = 1, 2, \ldots, \tilde{\nu}$, e

$$\hat{\boldsymbol{W}}(\lambda) := \frac{\hat{R}_1}{(\lambda - \bar{p})} + \frac{\hat{R}_2}{(\lambda - \bar{p})^2} + \cdots + \frac{\hat{R}_{\tilde{\nu}}}{(\lambda - \bar{p})^{\tilde{\nu}}}, \tag{W.7.3.38}$$

in modo tale che

$$\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda) := U_0\hat{\boldsymbol{W}}(\lambda)V_0 = \frac{\tilde{R}_1}{(\lambda - \bar{p})} + \frac{\tilde{R}_2}{(\lambda - \bar{p})^2} + \cdots + \frac{\tilde{R}_{\tilde{\nu}}}{(\lambda - \bar{p})^{\tilde{\nu}}}$$

e vai al Passo 2.

L'efficacia della Procedura W.7.3.3 è attestata dal seguente teorema.

Teorema W.7.3.1. *Data la matrice razionale $\boldsymbol{W}(\lambda)$ strettamente propria, di dimensioni $q \times p$, espressa dalla* (W.7.3.6)*, con $\mu > 1$, $M_\mu \neq 0$ e $\operatorname{rank} M_\mu < \min\{p, q\}$, la terna (A, B, C) fornita dalla Procedura W.7.3.3 dà luogo a una realizzazione minima $(A, B, C, 0)$ di $\boldsymbol{W}(\lambda)$.*

Dimostrazione. Dal momento che è ovvio che ognuno dei passi indicati può essere completato, bisogna mostrare solo: 1) che la procedura termina (essendo iterativa); 2) che la procedura fornisce una realizzazione; 3) che la realizzazione fornita è minima.

Circa il punto 1), si noti che al Passo 11 il valore $\tilde{\nu}$ del massimo indice h tale che $\tilde{R}_h \neq 0$ è sempre strettamente minore del grado $\tilde{\mu}$ del polinomio minimo $q_{\tilde{\boldsymbol{W}}}(\lambda)$ della matrice di trasferimento $\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ usata come dato per operare i Passi 2-11, e tale $\tilde{\nu}$ è poi utilizzato come il nuovo valore di $\tilde{\mu}$ nell'iterazione successiva dei Passi 2-11 (cfr Passi 12 e 2); pertanto in un numero finito di iterazioni di tali passi si ottiene o che $\tilde{\nu} = 1$ (cfr Passo 12), o che $\tilde{R}_h = 0$ per ogni $h = 1, \ldots, \tilde{\mu} - 1$ (cfr Passo 11), e perciò in ogni caso la conclusione della procedura.

Circa il punto 2), è immediato anzitutto verificare che l'effetto sia del Passo 10 sia del Passo 12 è quello di aggiornare la parte eventualmente già calcolata della realizzazione connettendo "in parallelo" ad essa l'ulteriore sistema caratterizzato dalle matrici $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ e $\tilde{D} = 0$, in modo che la matrice di trasferimento corrispondente alla quaterna complessiva ottenuta dopo tale aggiornamento sia la somma di quella corrispondente alla parte già prima eventualmente calcolata della realizzazione, più $\tilde{C}(\lambda I - \tilde{A})^{-1} + \tilde{D}$. Inoltre è facile capire (con l'aiuto della discussione che ha preceduto la Procedura W.7.3.3) dalla sequenza di passi precedenti il Passo 10 che le matrici $\tilde{C}_i$

e $\tilde{B}_i$, $i = 1, \dots, \tilde{\mu}$, e $\tilde{R}_i$, $i = 1, \dots, \tilde{\mu} - 1$, con essa calcolate sono tali da soddisfare le (W.7.3.15) riscritte con $\tilde{\mu}$, $\tilde{M}_i$, $\tilde{C}_i$ e $\tilde{B}_i$, $i = 1, \dots, \tilde{\mu}$, e $\tilde{R}_i$, $i = 1, \dots, \tilde{\mu} - 1$ al posto di μ, M_i, C_i e B_i, $i = 1, \dots, \mu$, e R_i, $i = 1, \dots, \mu - 1$, rispettivamente. Poiché le (W.7.3.9), così riscritte anch'esse, differiscono dalle (W.7.3.15) riscritte come indicato soltanto per la presenza in queste ultime delle matrici $\tilde{R}_{\tilde{\mu}-k}$, $k = 1, \dots, \tilde{\mu} - 1$, queste matrici svolgono il ruolo di "resti" delle matrici $\tilde{M}_{\tilde{\mu}-k}$, $k = 1, \dots, \tilde{\mu} - 1$, nel senso che con tali simboli per la $\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ decomposta in frazioni parziali nel modo indicato al Passo 2 è facile verificare che

$$\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda) = \tilde{C}(\lambda I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \sum_{i=1}^{\tilde{\mu}-1} \frac{\tilde{R}_i}{(\lambda - \bar{p})^i}. \tag{W.7.3.39}$$

Perciò, ove al Passo 11 risulti $\tilde{R}_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, \tilde{\mu}-1$, la procedura complessiva sino a quel passo ha prodotto una realizzazione della $\boldsymbol{W}(\lambda)$ assegnata all'inizio; ove al Passo 12 risulti $\tilde{\nu} = 1$, quanto ivi indicato dà luogo anche in questo caso a una quaterna $(A, B, C, 0)$ che è una realizzazione di tale $\boldsymbol{W}(\lambda)$; ove infine al Passo 12 risulti $\tilde{\nu} > 1$, quanto ivi indicato permette di proseguire il "completamento" della realizzazione, calcolando una realizzazione del termine $\sum_{i=1}^{\tilde{\mu}-1} \dfrac{\tilde{R}_i}{(\lambda - \bar{p})^i}$ presente nella (W.7.3.39) che, poi, ripetendo il Passo 10, sarà messa "in parallelo" a quella $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, 0)$ già calcolata che compare a secondo membro della (W.7.3.39).

Circa il punto 3), si mostrerà ora che la realizzazione ottenuta è raggiungibile e osservabile, e quindi minima per il Teorema 7.3.2 a 420. Dal momento che la verifica della raggiungibilità si può condurre in maniera perfettamente analoga (in quanto duale) alla verifica dell'osservabilità, si descriverà nel dettaglio solo quest'ultima. Si supponga di aver applicato la procedura, e che la procedura sia terminata con un valore di l pari a $\bar{l} \geq 0$; per $h = 0, 1, \dots, \bar{l}$, si indichino quindi con $\tilde{C}_1^{(h)}$, $\tilde{r}^{(h)}$ la matrice $\tilde{C}_1$ e il valore di $\tilde{r}$ ottenuti per il valore di $l = h$, e si definiscano

$$r_{tot}(h) \triangleq \sum_{j=0}^{h} \tilde{r}^{(h)}, \qquad C_1(h) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^{(0)} & \tilde{C}_1^{(1)} & \cdots & \tilde{C}_1^{(h)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times r_{tot}(h)};$$

per $h = 0, 1, \dots, \bar{l}$, si indichino poi con $U^{(h)}$, $U_0^{(h)}$ e $U_1^{(h)}$ le matrici U, U_0 e U_1 ottenute per $l = h$. Si noti che la realizzazione complessiva ottenuta alla fine della procedura ha la matrice A diagonale a blocchi, con gli $\bar{l}+1$ blocchi diagonali della forma indicata nella (W.7.3.35a), tranne l'ultimo di essi, se relativo a $\tilde{\mu} = 1$, che in tal caso ha la struttura indicata nel Lemma W.7.3.4; tenendo conto di ciò e applicando il PBH test di osservabilità, è facile vedere che la coppia (A, C) ottenuta dalla procedura è osservabile se e solo se tutte le colonne della matrice $C_1(\bar{l})$ sono linearmente indipendenti, ovvero se e solo se

$$\operatorname{rank}(C_1(\bar{l})) = r_{tot}(\bar{l}).$$

Al fine di mostrare che $\operatorname{rank}(C_1(\bar{l})) = r_{tot}(\bar{l})$, si mostrerà ora per induzione che per $h = 0, 1, \dots, \bar{l} - 1$ si ha

$$\operatorname{rank}(C_1(h)) = r_{tot}(h), \tag{W.7.3.40a}$$

$$\operatorname{Im}(C_1(h)) \cap \operatorname{Im}(U_1^{(h)}) = \{0\}, \tag{W.7.3.40b}$$

e che $U_1^{(h)}$ ha rango pari al numero delle proprie colonne. Per $h = 0$, la (W.7.3.40a) è banalmente vera in quanto $C_1(0) = \tilde{C}_1^{(0)}$ e $r_{tot}(0) = \tilde{r}^{(0)} = \mathrm{rank}(\tilde{C}_1^{(0)})$ (infatti $\tilde{C}_1^{(0)}$ ha le sue $\tilde{r}^{(0)}$ colonne tutte indipendenti per costruzione); inoltre, poiché $U^{(0)}$ e $U_0^{(0)}$ hanno le stesse dimensioni e $U_0^{(0)}$ ha rango pari al numero delle colonne, dalle (W.7.3.30) e (W.7.3.31a) si deduce che anche $U_1^{(0)}$ (come $\tilde{C}_1^{(0)}$) ha rango pari al numero delle proprie colonne, e che $\mathrm{Im}(\tilde{C}_1^{(0)}) \cap \mathrm{Im}(U_1^{(0)}) = \{0\}$, e quindi la (W.7.3.40b) per $h = 0$.

Supponendo dunque vere le (W.7.3.40), e che le colonne di $U_1^{(h)}$ siano tutte linearmente indipendenti, per un certo valore di $h = \bar{h}$, $0 \le \bar{h} < \bar{l} - 1$, si mostrerà ora che le (W.7.3.40) valgono anche per $h = \bar{h} + 1$, e che le colonne di $U_1^{(\bar{h}+1)}$ sono tutte linearmente indipendenti. Infatti, poiché $U^{(\bar{h}+1)}$ e $U_0^{(\bar{h}+1)}$ hanno le stesse dimensioni, $U_0^{(\bar{h}+1)} = U_1^{(\bar{h})}$ ha “rango pieno colonna” (per quanto supposto su $U_1^{(\bar{h})}$) e valgono le (W.7.3.30) e (W.7.3.31a), si deduce che le matrici $\tilde{C}_1^{(\bar{h}+1)}$ e $U_1^{(\bar{h}+1)}$ hanno “rango colonna pieno” e soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\tilde{C}_1^{(\bar{h}+1)}) \cap \mathrm{Im}(U_1^{(\bar{h}+1)}) &= \{0\},\\
\mathrm{Im}(\tilde{C}_1^{(\bar{h}+1)}) \subset \mathrm{Im}(U_0^{(\bar{h}+1)}) &= \mathrm{Im}(U_1^{(\bar{h})}),\\
\mathrm{Im}(U_1^{(\bar{h}+1)}) \subset \mathrm{Im}(U_0^{(\bar{h}+1)}) &= \mathrm{Im}(U_1^{(\bar{h})});
\end{aligned}$$

ma poiché per l'ipotesi induttiva vale la (W.7.3.40b) per $h = \bar{h}$, ricordando che $C_1(\bar{h} + 1) = \begin{bmatrix} C_1(\bar{h}) & \tilde{C}_1^{(\bar{h}+1)} \end{bmatrix}$, si ottiene anche che

$$\mathrm{Im}(C_1(\bar{h}+1)) = \mathrm{Im}(C_1(\bar{h})) \oplus \mathrm{Im}(\tilde{C}_1^{(\bar{h}+1)}), \tag{W.7.3.41a}$$

$$\mathrm{Im}(C_1(\bar{h}+1)) \cap \mathrm{Im}(U_1^{(\bar{h}+1)}) = \{0\}, \tag{W.7.3.41b}$$

e dalla (W.7.3.41a) è immediato dedurre che $\mathrm{rank}(C_1(\bar{h}+1)) = r_{tot}(\bar{h}+1)$.

Si è così dimostrato che le (W.7.3.40) valgono anche per $h = \bar{l} - 1$. Si noti ora che la matrice $\tilde{C}_1^{(\bar{l})}$ (sia ove sia stata ottenuta applicando per l'ultima volta il Passo 3, sia ove sia stata ottenuta applicando il Passo 12) per il Corollario W.7.3.1 soddisfa la relazione $\mathrm{Im}(\tilde{C}_1^{(\bar{l})}) \subset \mathrm{Im}(U_1^{(\bar{l}-1)})$, e poiché si è già mostrato che vale la (W.7.3.40b) con $h = \bar{l} - 1$, se ne deduce che $\mathrm{Im}(C_1(\bar{l}-1)) \cap \mathrm{Im}(\tilde{C}_1^{(\bar{l})}) = \{0\}$; poiché infine $\tilde{C}_1^{(\bar{l})}$ ha “rango colonna pieno” e $C_1(\bar{l}) = \begin{bmatrix} C_1(\bar{l}-1) & \tilde{C}_1^{(\bar{l})} \end{bmatrix}$, si deduce anche che $C_1(\bar{l})$ ha tutte le colonne linearmente indipendenti, e ciò conclude la dimostrazione. □

Osservazione W.7.3.4. Si noti che l'intero $r_{tot}(h)$ definito al punto 3) della dimostrazione del Teorema W.7.3.1 è minore o uguale di p e di q per ogni $h = 0, \ldots, \bar{l}$. Si noti inoltre che ove risulti $r_{tot}(h) = q$ o $r_{tot}(h) = p$ per h pari ad un certo valore di l corrispondente ad una certa iterazione dei passi da 2 a 11 o da 2 a 12 della Procedura W.7.3.3, ciò comporta che in tale iterazione o la matrice U_1 o la V_1 nella (W.7.3.30) del Passo 4 “svanisce” (la prima per il fatto di avere un numero nullo di colonne, la seconda per il fatto di avere un numero nullo di righe), ed implica che “svaniscono” la seconda riga a blocchi di $\bar{N}_h$ e $\bar{C}_{1+(\tilde{\mu}-h)}$ o la seconda colonna a blocchi di $\bar{N}_h$ e $\tilde{B}_h$ per ogni $h = 1, \ldots, \tilde{\mu} - 1$, e che la (W.7.3.34c) va sostituita con la relazione $\tilde{R}_{\tilde{\mu}-h} = 0$, $h = 1, \ldots, \tilde{\mu} - 1$, implicando perciò lo stop al Passo 11. □

Osservazione W.7.3.5. Come già accennato subito prima della (W.7.3.6), è facile capire che il Lemma W.7.3.5 continua a valere, e che la Procedura W.7.3.3 mantiene formalmente la sua validità ed efficacia, ovvero il Teorema W.7.3.1 resta formalmente vero (con la stessa dimostrazione) anche nel caso in cui nella (W.7.3.6) sia le matrici M_i, $i = 1, \ldots, \mu$, sia il polo $\bar{p}$ non siano reali (come supposto implicitamente nella procedura e nel teorema) ma complessi, a patto ovviamente di considerare nella procedura e negli enunziati del teorema e del Lemma W.7.3.5 matrici U_0, V_0, $\tilde{M}_i$, $i = 1, \ldots, \tilde{\mu}$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{B}_{\tilde{\mu}}$, U_1, V_1, U, V, T_y, T_u, $\bar{M}_h$, $\bar{B}_h$, $\bar{C}_{1+\tilde{\mu}-h}$, $\bar{N}_h$, $\bar{R}_{h,22}$, $\tilde{R}_h$, $h = 1, \ldots, \tilde{\mu} - 1$, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\hat{R}_h$, $h = 1, \ldots, \tilde{\nu}$, anch'esse non reali ma complesse. Detto ciò, resta da vedere come combinare le due "realizzazioni minime" (caratterizzate da matrici non reali ma complesse, ottenute dall'algoritmo descritto), ciascuna delle quali relativa ad uno dei poli complessi coniugati, in un'unica realizzazione minima caratterizzata da matrici reali. Si supponga dunque $\boldsymbol{W}(\lambda) = \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$, con $\boldsymbol{W}(\lambda)$, $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ strettamente proprie, dove $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ ha il solo polo $\bar{p} = \alpha + j\omega$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ ha il solo polo $\bar{p}^* = \alpha - j\omega$; dal momento che $\boldsymbol{W}(\lambda)$ è a coefficienti reali, gli elementi corrispondenti di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ sono caratterizzati da coefficienti complessi coniugati tra loro, per la Proprietà 2.4.9 a pag. 65; detta allora $(A_a, B_a, C_a, 0)$ una "realizzazione minima" di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$, ovvero, supposto $C_a(\lambda I - A_a)^{-1}B_a = \boldsymbol{W_a}(\lambda)$, ne consegue che $C_a^*(\lambda I - A_a^*)^{-1}B_a^* = \boldsymbol{W_b}(\lambda)$, e cioè che $(A_a^*, B_a^*, C_a^*, 0)$ è una "realizzazione" di $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$, anch'essa necessariamente minima (ciò implica, fra l'altro, che basta effettuare il calcolo della "realizzazione minima" di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$, potendosi ottenere la "realizzazione minima" di $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ semplicemente cambiando il segno della parte immaginaria degli elementi delle matrici A_a, B_a, C_a che costituiscono la "realizzazione" già ottenuta). Si supponga allora, in un primo momento, che la "realizzazione minima" $(A_a, B_a, C_a, 0)$ di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ sia della forma della terna (A, B, C) nelle (W.7.3.7), cioè che sia $A_a = A$, $B_a = B$ e $C_a = C$ con $\bar{p} = \alpha + \jmath\omega$ (ciò avviene in particolare ove $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ soddisfi le ipotesi del Lemma W.7.3.5 applicato ad essa). Allora una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda) = \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$ è data da $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, 0)$ dove, usando i simboli nelle (W.7.3.7),

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \alpha I_r & -\omega I_r & I_r & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega I_r & \alpha I_r & 0 & I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha I_r & -\omega I_r & I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega I_r & \alpha I_r & 0 & I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha I_r & -\omega I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega I_r & \alpha I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha I_r & -\omega I_r & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega I_r & \alpha I_r & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha I_r & -\omega I_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega I_r & \alpha I_r \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.42a}$$

$$\hat{B} \;=\; 2 \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{re}\,(B_1) \\ \mathrm{im}\,(B_1) \\ \mathrm{re}\,(B_2) \\ \mathrm{im}\,(B_2) \\ \mathrm{re}\,(B_3) \\ \mathrm{im}\,(B_3) \\ \vdots \\ \mathrm{re}\,(B_{\mu-1}) \\ \mathrm{im}\,(B_{\mu-1}) \\ \mathrm{re}\,(B_\mu) \\ \mathrm{im}\,(B_\mu) \end{bmatrix}, \tag{W.7.3.42b}$$

$$\begin{aligned} \hat{C} \;=\; \Big[\; & \mathrm{re}\,(C_1) \quad -\mathrm{im}\,(C_1) \quad \mathrm{re}\,(C_2) \quad -\mathrm{im}\,(C_2) \quad \mathrm{re}\,(C_3) \quad -\mathrm{im}\,(C_3) \quad \ldots \\ & \ldots \quad \mathrm{re}\,(C_{\mu-1}) \quad -\mathrm{im}\,(C_{\mu-1}) \quad \mathrm{re}\,(C_\mu) \quad -\mathrm{im}\,(C_\mu) \;\Big], \end{aligned} \tag{W.7.3.42c}$$

come ora si mostrerà. Infatti, indicando con T la seguente matrice quadrata, della stessa dimensione di $\hat{A}$:

$$T \triangleq \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\jmath I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & +\jmath I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\jmath I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & +\jmath I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & I_r & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\jmath I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & +\jmath I_r & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\jmath I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & +\jmath I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\jmath I_r & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & +\jmath I_r \end{bmatrix},$$

è facile constatare che essa è non singolare in quanto ne esiste l'inversa, che moltiplicata per T dà la matrice identità, espressa da

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_r & \jmath I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \jmath I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r & \jmath I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & I_r & \jmath I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & I_r & \jmath I_r \\ I_r & -\jmath I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & -\jmath I_r & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r & -\jmath I_r & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & I_r & -\jmath I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & I_r & -\jmath I_r \end{bmatrix},$$

e che inoltre tra le matrici $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ definite dalle (W.7.3.42) e le matrici A, B, C definite dalla (W.7.3.4), con $A_b = A_a^*$, $B_b = B_a^*$, $C_b = C_a^*$, sussistono le relazioni:

$$TAT^{-1} = T \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_a^* \end{bmatrix} T^{-1} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix}
\bar\alpha^+ I_r & I_r & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar\alpha^- I_r & I_r & 0 & \dots & 0 & 0\\
\bar\omega^- I_r & -\jmath I_r & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar\omega^+ I_r & \jmath I_r & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & \bar\alpha^+ I_r & I_r & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar\alpha^- I_r & I_r & \dots & 0 & 0\\
0 & \bar\omega^- I_r & -\jmath I_r & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar\omega^+ I_r & \jmath I_r & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & \bar\alpha^+ I_r & I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar\alpha^- I_r & I_r\\
0 & 0 & 0 & \dots & \bar\omega^- I_r & -\jmath I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar\omega^+ I_r & \jmath I_r\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar\alpha^+ I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar\alpha^- I_r\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar\omega^- I_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar\omega^+ I_r
\end{bmatrix} T^{-1} =\\
&= \quad \hat A
\end{aligned}
$$

(dove $\bar\alpha^+ \triangleq \alpha + \jmath\omega$, $\bar\alpha^- \triangleq \alpha - \jmath\omega$, $\bar\omega^+ \triangleq \omega + \jmath\alpha$ e $\bar\omega^- \triangleq \omega - \jmath\alpha$) e

$$
TB = T \begin{bmatrix} B_a \\ B_a^* \end{bmatrix} = \hat B, \qquad CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_a & C_a^* \end{bmatrix} T^{-1} = \hat C.
$$

Poiché, come già rilevato, i Lemmi W.7.3.3 e W.7.3.5 e il Teorema W.7.3.1, così come tutta la teoria sviluppata nel paragrafo 7.3, restano formalmente veri se se ne estende l'enunziato a matrici $\boldsymbol{W}(\lambda)$, $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ a coefficienti non reali e a loro "realizzazioni minime" costituite da matrici non reali, le relazioni precedenti mostrano che effettivamente le (W.7.3.42) forniscono una realizzazione minima reale di $\boldsymbol{W}(\lambda) = \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$ utilizzabile al Passo 2 della Procedura W.7.3.2 per ogni h tale che $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ abbia una coppia di poli complessi coniugati di molteplicità maggiore di 1 e tale che la scomposizione di $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ in frazioni parziali dia luogo a una somma $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ dei termini relativi a uno solo dei due poli che soddisfi l'ipotesi del Lemma W.7.3.5 oppure sia tale che l'applicazione ad essa della Procedura W.7.3.3 si concluda, con l'indice l pari a zero, allo Stop previsto in essa al Passo 11 (si noti che ciò accade certamente ove si applichi la Procedura W.7.3.2 in un caso in cui sia soddisfatta l'ipotesi del Lemma W.7.3.5, poiché allora al Passo 2 si ha $\tilde r = \min\{p, q\}$ e al Passo 7 svanisce la seconda colonna a blocchi o la seconda riga a blocchi della (W.7.3.33)).

Per i casi in cui, invece, l'applicazione della Procedura W.7.3.3 alla somma $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ dei termini relativi a uno solo dei poli di $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ non si concluda allo Stop previsto in essa al Passo 11, o si concluda a tale Stop con l'indice l maggiore di zero, detta μ_a la molteplicità massima di $\bar p = \alpha + \jmath\omega$ come polo di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$, detto $\bar l$ il valore dell'indice l alla conclusione della Procedura W.7.3.3 (cfr punto 3) della dimostrazione del Teorema W.7.3.1), e detti $\tilde r_0$, $\tilde\mu_0$, $\big(\tilde A_{a0},\ \tilde B_{a0},\ \tilde C_{a0}\big)$, $\tilde r_1$, $\tilde\mu_1$, $\big(\tilde A_{a1},\ \tilde B_{a1},\ \tilde C_{a1}\big)$, $\dots$, $\tilde r_{\bar l}$, $\tilde\mu_{\bar l}$, $\big(\tilde A_{a,\bar l},\ \tilde B_{a,\bar l},\ \tilde C_{a,\bar l}\big)$ gli $\bar l + 1$ interi $\tilde r$, gli $\bar l + 1$ interi $\tilde\mu$, e le $\bar l + 1$ terne $\big(\tilde A,\ \tilde B,\ \tilde C\big)$ complessivamente individuati ai Passi 2-9 di essa e eventualmente al Passo 12, ciascuna di queste ha una forma simile a quella della terna (A, B, C) definita dalle (W.7.3.7),[3] ciascuna con un valore di r pari a $\tilde r_i$, $i = 0, 1, \dots, \bar l$, sempre minore delle dimensioni p e q di u e y, rispettivamente, e con un valore di μ pari a $\tilde\mu_i$, $i = 0, 1, \dots, \bar l$; inoltre per tali interi $\tilde\mu_i$ risulta $\tilde\mu_0 = \tilde\mu_a > \tilde\mu_1 > \dots > \tilde\mu_{\bar l - 1} > \tilde\mu_{\bar l}$, e la "realizzazione minima"

[3]Tranne l'ultima terna $\big(\tilde A_{a,\bar l},\ \tilde B_{a,\bar l},\ \tilde C_{a,\bar l}\big)$, se $\tilde\mu_{\bar l} = 1$, che in tal caso ha la struttura indicata nel Lemma W.7.3.4.

$(A_a,\ B_a,\ C_a,\ 0)$ di $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ così fornita dalla Procedura W.7.3.3 ha la seguente forma:

$$A_a = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{a0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{a1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_{a,\bar{l}-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_{a\bar{l}} \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{a0} \\ \tilde{B}_{a1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{a,\bar{l}-1} \\ \tilde{B}_{a\bar{l}} \end{bmatrix}, \qquad \text{(W.7.3.43a)}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{a0} & \tilde{C}_{a1} & \dots & \tilde{C}_{a,\bar{l}-1} & \tilde{C}_{a\bar{l}} \end{bmatrix}. \qquad \text{(W.7.3.43b)}$$

Come già detto, la matrice $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ tale che $\boldsymbol{W_h}(\lambda) = \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$, e caratterizzata da coefficienti coniugati di quelli presenti in $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$, ammette una “realizzazione minima” $(A_a^*,\ B_a^*,\ C_a^*,\ 0)$. È dunque facile capire che, applicando dapprima ancora il Lemma W.7.3.3 (esteso a matrici a coefficienti non reali e a “realizzazioni” non reali) a tali $\boldsymbol{W_a}(\lambda)$ e $\boldsymbol{W_b}(\lambda)$ e alle loro “realizzazioni minime” così individuate, è poi possibile individuare una matrice T quadrata e non singolare di dimensione pari a due volte quella di A_a (la cui struttura, insieme a quella dell'inversa T^{-1}, non è difficile desumere dall'espressione delle T e T^{-1} riportata dopo le (W.7.3.42) per il caso $\bar{l} = 0$, cioè per il caso in cui nelle (W.7.3.43) il numero di blocchi diagonali di A_a è pari ad uno) tale che

$$T \begin{bmatrix} A_a & 0 \\ 0 & A_a^* \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{A}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{A}_{\bar{l}} \end{bmatrix} \triangleq \hat{A}_{ab}, \qquad \text{(W.7.3.44a)}$$

$$T \begin{bmatrix} B_a \\ B_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \vdots \\ \hat{B}_{\bar{l}} \end{bmatrix} \triangleq \hat{B}_{ab}, \qquad \text{(W.7.3.44b)}$$

$$\begin{bmatrix} C_a & C_a^* \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{C}_0 & \hat{C}_1 & \dots & \hat{C}_{\bar{l}} \end{bmatrix} \triangleq \hat{C}_{ab}, \qquad \text{(W.7.3.44c)}$$

ove, per ogni $i = 0,\ 1,\ \dots,\ \bar{l}$, $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$ e $\hat{C}_i$ hanno la stessa struttura delle matrici $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, rispettivamente, definite dalle (W.7.3.42),[4] ma con r e μ sostituiti da $\tilde{r}_i$ e $\tilde{\mu}_i$, rispettivamente; e concludere che la quaterna $\left(\hat{A}_{ab},\ \hat{B}_{ab},\ \hat{C}_{ab},\ 0\right)$, per come è stata ottenuta e per il Lemma W.7.3.3 e per il Teorema W.7.3.1 estesi a matrici con coefficienti non reali, è una realizzazione minima di $\boldsymbol{W_h}(\lambda) = \boldsymbol{W_a}(\lambda) + \boldsymbol{W_b}(\lambda)$. Ciò completa la specificazione del Passo 2 della Procedura W.7.3.2 per il caso in cui non tutti i termini $\boldsymbol{W_h}(\lambda)$ dell'assegnata $\boldsymbol{W}(\lambda)$ abbiano poli semplici. □

Osservazione W.7.3.6. Si noti che il metodo di realizzazione presentato, basato sulle Procedure W.7.3.2 e W.7.3.3, nonché sul Lemma W.7.3.4, sulle (W.7.3.5) dell'Osservazione W.7.3.3 e sulle (W.7.3.42) e (W.7.3.44) dell'Osservazione W.7.3.5, evidenzia gli aspetti essenziali della forma di Jordan della matrice A della realizzazione minima

[4] Tranne che per $i = \bar{l}$, se $\tilde{\mu}_{\bar{l}} = 1$, nel qual caso $\hat{A}_{\bar{l}}$, $\hat{B}_{\bar{l}}$ e $\hat{C}_{\bar{l}}$ hanno la stessa struttura delle matrici $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ definite dalle (W.7.3.5).

da esso fornita. Infatti da tutto quanto precede, ivi compresa la dimostrazione del Teorema W.7.3.1 e l'Osservazione W.7.3.5, è chiaro che: a) tale matrice A ha la struttura diagonale a blocchi mostrata dalla (W.7.3.3a), con un blocco diagonale per ogni autovalore reale distinto e per ogni coppia di autovalori complessi coniugati distinta; b) in essa il blocco A_h relativo a un singolo autovalore di A (e polo di $\boldsymbol{W}(\lambda)$) reale p_h ha a sua volta, in generale, una struttura diagonale a blocchi simile a quella della matrice A_a nella (W.7.3.43a), in cui i blocchi diagonali $\tilde{A}_{ai}$ hanno la struttura della matrice A nella (W.7.3.7a) per $\bar{p} = p_h$, per valori di μ decrescenti a partire, per $\tilde{A}_{a1}$, dal valore pari alla massima molteplicità di p_h come polo di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, tranne l'ultimo blocco $\tilde{A}_{a,\bar{l}}$, se relativo a $\mu = 1$, che in tal caso ha la struttura indicata nel Lemma W.7.3.4 per $\bar{p} = p_h$; c) in base a quanto precisato nella nota 1 a pag. 429.7, nella forma di Jordan di ognuno di tali blocchi $\tilde{A}_{ai}$ compaiono tanti blocchi di Jordan relativi a tale autovalore $\bar{p} = p_h$ quant'è la dimensione r dei blocchi identità presenti in $\tilde{A}_{ai}$, le dimensioni di tali blocchi di Jordan sono tutte uguali al numero μ di blocchi diagonali $p_h I_r$ presenti in $\tilde{A}_{ai}$, e tale numero è pari anche alla lunghezza delle r catene di Jordan destre (o sinistre) individuabili in relazione pure ad $\tilde{A}_{ai}$. Poiché la forma di Jordan di una matrice diagonale a blocchi $A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_{\bar{\nu}_{\boldsymbol{W}}}\}$ o $A = \operatorname{diag}\{\tilde{A}_{a0}, \ldots, \tilde{A}_{a,\bar{l}}\}$ è la matrice diagonale a blocchi che ha come blocchi diagonali le forme di Jordan dei blocchi diagonali A_i, $i = 1, \ldots, \bar{\nu}_{\boldsymbol{W}}$, o $\tilde{A}_{ai}$, $i = 0, 1, \ldots, \bar{l}$, rispettivamente, la precedente discussione permette di arguire i numeri e le dimensioni dei blocchi di Jordan relativi alla forma di Jordan della matrice A della realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ fornita dal metodo prima presentato (e di individuare una catena di Jordan destra o sinistra per ognuno di essi), e perciò, per il Teorema 7.3.3 a pag. 423, anche della matrice A presente in una qualunque altra realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$; e non soltanto per gli autovalori reali, ma anche per quelli complessi coniugati a coppie, poiché il modo con cui sono state ottenute le (W.7.3.5), (W.7.3.42) e (W.7.3.44) consente di riferire anche ad essi quanto precisato ai punti b) e c) circa la forma di Jordan (che, per una matrice A con autovalori non tutti reali, è non reale).

Si sottolinea perciò che uno dei motivi di interesse del metodo di realizzazione descritto consiste nel fatto che esso rivela la "struttura interna" delle realizzazioni minime della matrice di trasferimento assegnata, in termini di numero e dimensioni dei blocchi di Jordan nella forma di Jordan della matrice A che ne caratterizza la dinamica, ovvero in termini di numero e lunghezza delle corrispondenti catene di Jordan. Si noti in proposito che, per ogni polo distinto della assegnata $\boldsymbol{W}(\lambda)$, l'algoritmo prima di tutto individua la lunghezza delle catene di Jordan più lunghe, ovvero la dimensione dei blocchi di Jordan più grandi, e il numero di esse o essi[5], e quindi cerca di fissare le matrici B_h e C_h nelle (W.7.3.3) in modo da ottenere esattamente la matrice di trasferimento $\boldsymbol{W}(\lambda)$ desiderata. Ciò è possibile senza introdurre ulteriori catene di Jordan dopo il primo insieme di esse se e solo se per $l = 0$ al Passo 9 della Procedura W.7.3.3 si ha $\tilde{R}_{\tilde{\mu}-1} = \tilde{R}_{\tilde{\mu}-2} = \ldots = \tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 = 0$; in caso contrario, i coefficienti $\tilde{R}_{\tilde{\mu}-1}, \ldots, \tilde{R}_1$ determinano un "resto" $\tilde{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ al quale la procedura è nuovamente applicata; poiché ad ogni iterazione il nuovo "resto" ha in $\bar{p}$ un polo di molteplicità inferiore a quella che il polo $\bar{p}$ aveva nel "resto" relativo all'iterazione precedente, è sempre possibile determinare la realizzazione minima cercata in un numero finito di iterazioni. □

[5]Infatti, indicando ora con $\boldsymbol{W}(\lambda)$ la somma delle frazioni parziali relative al generico polo $\bar{p}$ dell'assegnata matrice di trasferimento, e assumendola espressa dalla (W.7.3.6), con $M_\mu \neq 0$, tale lunghezza o dimensione è pari a μ, e tale numero è pari a $r \triangleq \operatorname{rank} M_\mu$.

W.7.3.2 Realizzazione minima diretta a partire da dati nel dominio del tempo[6]

Come accennato alla fine del paragrafo 7.3.1, in molti contesti applicativi si desidera ottenere una quaterna di matrici (A, B, C, D) (che caratterizzano nello spazio di stato un sistema dinamico lineare e stazionario) per descrivere un processo reale, del quale non è disponibile né un modello completo del tipo (7.1.1), né la corrispondente matrice di trasferimento $\boldsymbol{W}(\lambda)$, ma sul quale si suppone che sia possibile effettuare un numero *finito* di esperimenti di durata *limitata*, ognuno dei quali consistente: (a) nell'ottenere che le "condizioni iniziali" del processo siano nulle; (b) nell'imporre al processo stesso una certa funzione d'ingresso e nel misurare la risposta in uscita corrispondente per un intervallo finito di tempo (cfr paragrafo 2.6) la cui ampiezza sarà indicata d'ora in poi con $\bar{h}$. Tale tipo di problema sarà considerato in questo paragrafo soltanto per un processo reale a tempo discreto. Sotto l'ipotesi che esso possa essere descritto da un sistema lineare e stazionario della forma (6.2.1), è facile capire che, se la dinamica del processo reale considerato di cui si ignora la rappresentazione ingresso-stato-uscita è tale che i suoi modi naturali siano tutti convergenti a zero, per garantire quanto prima indicato al punto (a) sarà sufficiente mantenere pari a zero tutti gli ingressi per un tempo abbastanza lungo da ottenere che la risposta libera per ciascuna delle q uscite sia arrivata a valori del tutto trascurabili (dato che eventuali modi naturali inosservabili in uscita, per quanto rilevato nei paragrafi 3.2.3 e 6.5, non avranno comunque alcun effetto sulla risposta in uscita). Circa il punto (b), sotto la stessa ipotesi, applicando in particolare un impulso unitario sul primo ingresso (e tenendo a zero gli altri ingressi) sarà possibile misurare la risposta in uscita del sistema per $k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$, e i valori di essa coincideranno (a meno degli inevitabili errori di misura, che si può cercare di rendere abbastanza piccoli) con i valori della prima colonna della matrice delle risposte impulsive in uscita agli istanti $k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$; con altri $p - 1$ esperimenti (dopo aver azzerato di nuovo lo stato iniziale nel modo detto), applicando di volta in volta un impulso unitario sull'ingresso i-esimo, e tenendo a zero gli altri ingressi, sarà possibile misurare gli $\bar{h} + 1$ valori della risposta in uscita ai tempi $k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$, che coincideranno (a meno degli inevitabili errori di misura, che si può cercare di rendere abbastanza piccoli) con i primi $\bar{h} + 1$ valori della i-esima colonna della matrice delle risposte impulsive in uscita (cioè con i valori di essa agli istanti 0, 1, ..., $\bar{h}$). In tal modo dopo p esperimenti si saranno ottenuti gli $\bar{h} + 1$ valori della matrice delle risposte impulsive in uscita $W(k)$ agli istanti $k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$, che sono esattamente i primi $\bar{h} + 1$ coefficienti (matriciali) W_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$ nella (7.3.5), detti coefficienti di Markov (cfr Osservazione 7.3.1 a pag.419; in proposito si ricordi anche che l'espansione (7.3.5) di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ vale per ogni λ tale

[6] Cfr L. M. Silverman, Realization of Linear Dynamical Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16:554–567, 1971.

che $|\lambda|$ sia maggiore del modulo del polo di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ di modulo massimo); da tali valori si desidera ricavare una quaterna di matrici (A, B, C, D) che soddisfi la (7.3.13) per $h = 0, 1, \ldots, \bar{h}$, quaterna che si dice ***realizzazione parziale*** dei coefficienti di Markov già ottenuti sperimentalmente (ove la parola "parziale" è motivata dal fatto che si suppone di conoscere un numero finito di essi, anziché tutta l'espansione (7.3.5) di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ nella somma di un numero infinito di termini); essa, alla luce di quanto visto in questo capitolo, è opportuno che individui un sistema privo di sottosistemi irraggiungibili o inosservabili, in modo da non introdurre dinamiche la cui esistenza non è deducibile dai dati sperimentali disponibili.

Osservazione W.7.3.7. Si noti che, dati i coefficienti W_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$, si può sempre ottenere facilmente una realizzazione parziale in forma canonica di raggiungibilità (7.3.8) o in forma canonica di osservabilità (7.3.9), ponendo $\bar{m} = \bar{h}$ e $\beta_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, \bar{m} - 1$, nelle (7.3.8), (7.3.9), come è facile verificare. Mediante la decomposizione di Kalman completa (cfr paragrafo 7.2) è poi possibile estrarre da tale realizzazione parziale un sottosistema raggiungibile e osservabile $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ tale che $\bar{D} = W_0$ e $\bar{C}\bar{A}^{i-1}\bar{B} = W_i$, $i = 1, 2, \ldots, \bar{h}$; perciò anch'esso è una realizzazione parziale. Tuttavia, tale sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ non è, in generale, una realizzazione parziale con lo stato di dimensione minima dei dati W_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$: si consideri infatti il seguente controesempio. Siano $p = q = 1$, $\bar{h} = 4$, $W_0 = 0$, $W_i = 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 4$. Procedendo nel modo appena indicato, per la forma (7.3.8) si ottiene immediatamente (senza bisogno di ricorrere alla decomposizione di Kalman completa) la seguente quaterna raggiungibile e osservabile $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = 0,$$

con stato di dimensione 4; tuttavia, il metodo che sarà spiegato nel seguito (Procedura W.7.3.4) consente di individuare la seguente realizzazione parziale:

$$\bar{A} = 2, \quad \bar{B} = 1, \quad \bar{C} = 1, \quad \bar{D} = 0,$$

con stato di dimensione 1. □

Alla luce dell'osservazione precedente appare ragionevole concentrare l'attenzione sul *problema della realizzazione parziale minima*, nel quale si cerca un sistema dinamico con lo stato della dimensione più piccola possibile la cui matrice delle risposte impulsive in uscita $W(h)$ per $h = 0, 1, \ldots, \bar{h}$ coincida con assegnati valori $W_h \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $h = 0, 1, \ldots, \bar{h}$ (che si assumono ricavati sperimentalmente, ma in condizioni ideali di assenza di errori o in cui essi siano trascurabili); tale sistema dinamico si dice ***realizzazione parziale minima*** dei coefficienti W_h, $h = 0, 1, \dots, \bar{h}$. Poiché tali dati sperimentali sono soltanto un numero finito di coefficienti di Markov, che appare un'*informazione parziale* sulla corrispondente $\boldsymbol{W}(\lambda)$, e un'informazione completa su di essa sembrerebbe costituita invece dalla conoscenza di tutti tali coefficienti che appaiono (in numero infinito) nella (7.3.5), sembra appunto ragionevole che si cerchi almeno, con opportune tecniche, una realizzazione parziale di ordine minimo tra tutte quelle esistenti. Ma, soprattutto, è ragionevole chiedersi anche se opportune condizioni sugli $\bar{h}+1$ coefficienti W_i, $i = 0, 1, \dots, \bar{h}$, possano eventualmente garantire che una realizzazione parziale minima di essi sia anche una realizzazione minima della corrispondente $\boldsymbol{W}(\lambda)$ del sistema.

Circa il primo dei due problemi ora menzionati, il ***problema della realizzazione parziale minima*** può dunque essere definito come segue: *date $\bar{h}+1$ matrici $W_h \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $h = 0, 1, 2, \dots, \bar{h}$, determinare il più piccolo intero n (che si dice* **ordine** *della realizzazione parziale minima) e una quaterna di matrici (A, B, C, D) con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, tali che $W_0 = D$ e $W_h = CA^{h-1}B$ per $h = 1, 2, \dots, \bar{h}$* (ovvero tali che i primi $\bar{h}+1$ coefficienti nell'espansione (7.3.5) di $\boldsymbol{W}(\lambda) \triangleq C(\lambda I - A)^{-1}B + D$ coincidano con gli assegnati W_i, $i = 0, 1, 2, \dots, \bar{h}$). Ove $\bar{h}$ sia pari (ipotesi che è facile rendere soddisfatta), il problema della realizzazione parziale minima può essere risolto mediante la seguente procedura, sotto le condizioni del successivo Teorema W.7.3.2.

Procedura W.7.3.4 (***Realizzazione parziale minima dei coefficienti di Markov*** W_0***,*** W_1***, ...,*** $W_{\bar{h}} \in \mathbb{R}^{q\times p}$***, sotto le ipotesi che*** $\bar{h}$ ***sia pari e che, con le notazioni*** (7.3.16), (7.3.18)***, risulti*** $\operatorname{Im}\left(\Gamma^+_{\frac{\bar{h}}{2}}\right) \subset \operatorname{Im}\left(\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}\right)$ ***e*** $\operatorname{Im}\left(\left(\Gamma^+_{\frac{\bar{h}}{2}}\right)'\right) \subset \operatorname{Im}\left(\Gamma'_{\frac{\bar{h}}{2}}\right)$)**.**

Passo 0. Poni $a \triangleq \dfrac{\bar{h}}{2}$, e definisci Γ_a, Γ_a^+ come nelle (7.3.16), (7.3.18).
Passo 1. Poni $n \triangleq \operatorname{rank}(\Gamma_a)$.
Passo 2. Fattorizza Γ_a nel modo seguente: $\Gamma_a = Q_a P_a$, con $Q_a \in \mathbb{R}^{aq\times n}$, $P_a \in \mathbb{R}^{n\times ap}$ e $\operatorname{rank}(Q_a) = \operatorname{rank}(P_a) = n$.
Passo 3. Poni $A := Q_a{}^\sharp \Gamma_a^+ P_a{}^\sharp$, dove $Q_a{}^\sharp \triangleq (Q_a{}' Q_a)^{-1} Q_a{}'$ e $P_a{}^\sharp \triangleq P_a{}'(P_a P_a{}')^{-1}$.
Passo 4. Poni $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ pari alla matrice costituita dalle prime p colonne di P_a.
Passo 5. Poni $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ pari alla matrice costituita dalle prime q righe di Q_a.
Passo 6. Poni $D := W_0$.

Il teorema seguente nella parte a) attesta l'efficacia della Procedura W.7.3.4. L'interesse della parte b) risulterà chiaro dal seguito.

Teorema W.7.3.2. *a) La Procedura W.7.3.4 risolve il problema della realizzazione parziale minima di $W_h \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $h = 0, 1, 2, \dots, \bar{h}$, sotto le ipotesi che*

$\bar{h}$ *sia pari e che, con le notazioni* (7.3.16), (7.3.18), *valgano le due condizioni seguenti:*

$$\operatorname{Im}\left(\Gamma^{+}_{\frac{\bar{h}}{2}}\right) \subset \operatorname{Im}\left(\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}\right), \quad \operatorname{Im}\left(\left(\Gamma^{+}_{\frac{\bar{h}}{2}}\right)'\right) \subset \operatorname{Im}\left(\Gamma'_{\frac{\bar{h}}{2}}\right), \tag{W.7.3.45}$$

e l'ordine della realizzazione parziale minima fornita da tale procedura è pari al rango di $\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}$.

b) Sotto l'ipotesi che $\bar{h}$ *sia pari, le condizioni* (W.7.3.45) *sono anche necessarie affinché il problema della realizzazione parziale minima di* $W_h \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $h = 0, 1, \ldots, \bar{h}$, *ammetta una soluzione di ordine uguale al rango di* $\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}$.

Dimostrazione. a) È immediato vedere che la Procedura W.7.3.4 può sempre essere completata, qualunque sia l'insieme dei dati $W_h \in \mathbb{R}^{q\times p}$, $h = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$, e che l'ordine n della quaterna (A, B, C, D) che essa individua è pari al rango di $\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}$ (Passo 1); occorre quindi dimostrare: (α) che valgono le relazioni $W_0 = D$ e $W_h = CA^{h-1}B$ per $h = 1, 2, \ldots, \bar{h}$, e (β) che la dimensione n della matrice A così individuata, cioè l'ordine della realizzazione parziale (A, B, C, D) così individuata, è minimo tra quelli di tutte le realizzazioni parziali di W_0, W_1, $\ldots W_{\bar{h}}$.

(α) La relazione $W_0 = D$ vale per definizione di D (Passo 6). Per mostrare che $W_h = CA^{h-1}B$ per $h = 1, 2, \ldots, \bar{h}$, si cominci col rilevare che le ipotesi sui ranghi di Γ_a, Q_a e P_a e la relazione $\Gamma_a = Q_aP_a$ (cfr Passi 1 e 2) implicano che $\operatorname{Im}(\Gamma_a) = \operatorname{Im}(Q_a)$ e $\operatorname{Im}(\Gamma'_a) = \operatorname{Im}(P'_a)$. Pertanto le (W.7.3.45) implicano che $\operatorname{Im}(\Gamma^+_a) \subset \operatorname{Im}(Q_a)$ e $\operatorname{Im}\left((\Gamma^+_a)'\right) \subset \operatorname{Im}(P'_a)$; perciò esistono due matrici $M \in \mathbb{R}^{n\times ap}$ e $L \in \mathbb{R}^{n\times aq}$ tali che

$$\Gamma^+_a = Q_aM, \quad \left(\Gamma^+_a\right)' = P'_aL. \tag{W.7.3.46}$$

Premoltiplicando per $Q^\sharp_a$ i due membri della prima delle (W.7.3.46) si ha $Q^\sharp_a\Gamma^+_a = Q^\sharp_aQ_aM = M$. Ora trasponendo il primo e l'ultimo membro di quest'ultima relazione, e sostituendo in essa la seconda delle (W.7.3.46), si ha

$$M' = \left(\Gamma^+_a\right)'\left(Q^\sharp_a\right)' = P'_aL\left(Q^\sharp_a\right)'; \tag{W.7.3.47}$$

trasponendo il primo e l'ultimo membro della (W.7.3.47) si ha $M = Q^\sharp_aL'P_a$, relazione che, sostituita nella prima delle (W.7.3.46), dà

$$\Gamma^+_a = Q_aQ^\sharp_aL'P_a; \tag{W.7.3.48}$$

questa, premoltiplicata per $Q^\sharp_a$ e postmoltiplicata per $P^\sharp_a$, dà luogo alla relazione

$$Q^\sharp_a\Gamma^+_aP^\sharp_a = Q^\sharp_aL'. \tag{W.7.3.49}$$

Poiché al Passo 3 si è definita $A \triangleq Q_a^\sharp \Gamma_a^+ P_a^\sharp$, la (W.7.3.48) e la (W.7.3.49) implicano che

$$\Gamma_a^+ = Q_a A P_a. \tag{W.7.3.50}$$

Ora per mostrare che $W_h = CA^{h-1}B$ per $h = 1,\, 2,\, \dots,\, \bar{h}$, basterà mostrare che le matrici A, B, C, P_a e Q_a definite nella Procedura W.7.3.4 soddisfano le relazioni $P_a = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{a-1}B]$ e $Q_a = [C' \;\; A'C' \;\; \dots \;\; (A^{a-1})'C']'$; infatti riscrivendo in tal modo P_a e Q_a nelle relazioni $\Gamma_a = Q_a P_a$ (dal Passo 2) e $\Gamma_a^+ = Q_a A P_a$ (la (W.7.3.50)), si ottiene appunto che $W_h = CA^{h-1}B$ per $h = 1, 2, \dots, 2a = \bar{h}$ (cfr (7.3.17) e (7.3.18)). Dunque si indichino con $P_{a,i} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ l'i-esimo blocco di P_a, $Q_{a,j} \in \mathbb{R}^{q\times n}$ il j-esimo blocco di Q_a, $\Gamma_{a,i,j} = W_{i+j-1} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ il blocco di Γ_a di posizione (i,j), $\Gamma_{a,i,j}^+ = W_{i+j} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ il blocco di Γ_a^+ di posizione (i,j); siano inoltre $\Gamma_{a,*,j} \in \mathbb{R}^{aq\times p}$ la j-esima colonna a blocchi di Γ_a e $\Gamma_{a,*,j}^+ \in \mathbb{R}^{aq\times p}$ la j-esima colonna a blocchi di Γ_a^+. Poiché $B \triangleq P_{a.1}$, per mostrare che $P_a = [B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{a-1}B]$ basta mostrare che $P_{a,j+1} = AP_{a,j}$, $j = 1, 2, \dots, a-1$. Per definizione, $\Gamma_{a,*,j+1} = \Gamma_{a,*,j}^+$, $j = 1, 2, \dots, a-1$; inoltre poiché dal Passo 2 e dalla (W.7.3.50) si ha $\Gamma_a = Q_a P_a$, $\Gamma_a^+ = Q_a A P_a$, si ha anche $\Gamma_{a,*,j+1} = Q_a P_{a,j+1}$, $\Gamma_{a,*,j}^+ = Q_a A P_{a,j}$, e quindi $Q_a P_{a,j+1} = Q_a A P_{a,j}$, $j = 1, 2, \dots, a-1$; questa relazione, premoltiplicata per $Q_a^\sharp$, fornisce la relazione desiderata $P_{a,j+1} = AP_{a,j}$, $j = 1, 2, \dots, a-1$. La dimostrazione della relazione $Q_{a,j+1} = Q_{a,j}A$, $j = 1, 2, \dots, a-1$, che implica $Q_a = [C' \;\; A'C' \;\; \dots \;\; (A^{a-1})'C']'$, è analoga.
(β) Per mostrare che la realizzazione parziale (A, B, C, D) così individuata ha ordine minimo, si procede per assurdo, assumendo che esista una realizzazione parziale $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ di ordine $\bar{n} < n$. Per il Teorema 2.4.1 (di Cayley-Hamilton) a pag. 74 si ha che $\operatorname{rank}(\bar{P}_a) \le \bar{n} < n$, $\operatorname{rank}(\bar{Q}_a) \le \bar{n} < n$, dove con $\bar{P}_a$ e $\bar{Q}_a$ si sono indicate per brevità le matrici che, secondo la notazione introdotta con le (5.2.5) e (6.2.4), andrebbero indicate come $P_a(\bar{A}, \bar{B})$ e $Q_a(\bar{A}, \bar{C})$, rispettivamente, ovvero le matrici di raggiungibilità e di osservabilità in a passi della realizzazione parziale $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$, per le quali per la (7.3.17) deve valere la fattorizzazione $\Gamma_a = \bar{Q}_a \bar{P}_a$; per la seconda diseguaglianza di Sylvester (7.3.14) si ha quindi che $\operatorname{rank}(\Gamma_a) \le \min\{\operatorname{rank}(\bar{P}_a), \operatorname{rank}(\bar{Q}_a)\} < n$, mentre per definizione al Passo 1 si è posto $n \triangleq \operatorname{rank}(\Gamma_a)$.

b) Se, per assurdo, la prima delle (W.7.3.45) fosse violata, si avrebbe $\operatorname{Im}\left(\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}^+\right) \not\subset \operatorname{Im}\left(\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}\right)$, e quindi, definendo $a \triangleq \frac{\bar{h}}{2}$ e la matrice

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & \cdots & W_a & W_{a+1} \\ W_2 & W_3 & & & W_{a+1} & W_{a+2} \\ W_3 & & & & W_{a+2} & W_{a+3} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ W_a & W_{a+1} & W_{a+2} & \cdots & W_{2a-1} & W_{2a} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_a \end{bmatrix} \;\; \Gamma_a^+ \right] = \left[\Gamma_a \;\; \begin{bmatrix} W_{a+1} \\ W_{a+2} \\ W_{a+3} \\ \vdots \\ W_{2a} \end{bmatrix} \right],$$

si dovrebbe avere che

$$\operatorname{rank}(\Gamma) > \operatorname{rank}(\Gamma_a) \triangleq n.$$

D'altro canto, poiché per ipotesi il problema della realizzazione parziale minima ha una soluzione (A, B, C, D) di ordine n, si ha

$$\Gamma = Q_a(A, C) P_{a+1}(A, B),$$

con rank $(Q_a(A, C)) \leq n$ e rank $(P_{a+1}(A, B)) \leq n$, e quindi $\operatorname{rank}(\Gamma) \leq n$ in base alla seconda diseguaglianza di Sylvester (7.3.14). Tale contraddizione mostra la necessità della prima delle (W.7.3.45). La dimostrazione della necessità della seconda delle (W.7.3.45) è analoga (duale), ed è omessa per brevità. □

Poiché l'informazione disponibile nel problema della realizzazione parziale minima (ovvero i coefficienti $W_0, W_1, \ldots, W_{\bar{h}}$) è solo una parte dell'informazione contenuta nella $\boldsymbol{W}(\lambda)$ (cfr la (7.3.5)), è facile capire che esistono infinite $\boldsymbol{W}(\lambda)$ *diverse* fra loro ma aventi i primi $\bar{h}+1$ coefficienti W_i uguali, e quindi *la stessa realizzazione parziale minima* (sulla base dei soli coefficienti $W_0, W_1, \ldots, W_{\bar{h}}$). Come già precisato, appare dunque necessario domandarsi se, e sotto quali ipotesi, la Procedura W.7.3.4 conduce ad una realizzazione parziale minima dei $W_0, W_1, \ldots, W_{\bar{h}}$ che è anche una realizzazione minima della particolare $\boldsymbol{W}(\lambda)$ che ha "generato" i $W_0, W_1, \ldots, W_{\bar{h}}$. In base al Lemma 7.3.2, solo un numero *finito* (e pari a $\bar{m}+1$, ove $\bar{m}$ è il grado del polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ di $\boldsymbol{W}(\lambda)$) dei coefficienti W_i nella (7.3.5) sono realmente indipendenti, e quindi è ragionevole aspettarsi che se $\bar{h}$ è *sufficientemente grande*, l'informazione contenuta nei W_i per $i = 0, 1, 2, \ldots, \bar{h}$ è in realtà completa (equivalente alla conoscenza della $\boldsymbol{W}(\lambda)$, ovvero di tutti i W_i, $i \geq 0$). Anzi dal Lemma 7.3.2 è possibile dedurre in modo abbastanza immediato il seguente teorema, che chiarisce un aspetto importante del problema della realizzazione parziale minima.

Teorema W.7.3.3. *Se la matrice $\boldsymbol{W}(\lambda)$ è realizzabile, allora* $\operatorname{rank}(\Gamma_a) = n$, *per ogni intero $a \geq \bar{m}$, dove $\bar{m}$ è il grado del polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ e n è l'ordine delle realizzazioni minime di $\boldsymbol{W}(\lambda)$.*

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{W}(\lambda)$ è realizzabile e (A, B, C, D) è una sua realizzazione minima, per i suoi coefficienti di Markov vale la (7.3.17) per ogni intero positivo a, e in particolare per ogni intero positivo $a \geq n$. D'altra parte è facile verificare che, grazie al Lemma 7.3.2, per ogni $a > \bar{m}$ la $(\bar{m}+1)$-esima colonna [riga] a blocchi di Γ_a è ottenuta combinando linearmente le prime $\bar{m}$ colonne [righe] a blocchi di Γ_a, e ognuna delle successive è ottenuta combinando linearmente le $\bar{m}$ colonne [righe] a blocchi immediatamente precedenti di Γ_a. Detta perciò $\Gamma_{\bar{m}+1}^-$ la matrice ottenuta da $\Gamma_{\bar{m}+1}$ rimuovendo da essa l'ultima ($(\bar{m}+1)$-esima) riga a blocchi, l'ultima colonna a blocchi di $\Gamma_{\bar{m}+1}^-$ è combinazione lineare delle $\bar{m}$ colonne precedenti, e perciò rank $\left(\Gamma_{\bar{m}+1}^-\right) = \operatorname{rank}(\Gamma_{\bar{m}})$. Per la definizione di $\Gamma^-_{\bar{m}+1}$ e per quanto detto sulla $(\bar{m}+1)$-esima riga a blocchi di $\Gamma_{\bar{m}+1}$, si ha pure $\operatorname{rank}(\Gamma_{\bar{m}+1}) = \operatorname{rank}\left(\Gamma^-_{\bar{m}+1}\right)$, e perciò $\operatorname{rank}(\Gamma_{\bar{m}+1}) = \operatorname{rank}(\Gamma_{\bar{m}})$. Procedendo poi ricorsivamente con ulteriori valori crescenti di a, resta dimostrato che $\operatorname{rank}(\Gamma_a) = \operatorname{rank}(\Gamma_{\bar{m}})$ per ogni intero $a \geq \bar{m}$; perciò in particolare anche per a tale che $a \geq n$. Ma, per un tale valore di a, dalla già richiamata fattorizzazione (7.3.17) di Γ_a si evince direttamente per il Lemma 7.3.5 a pag. 420 che $\operatorname{rank}(\Gamma_a) = n$. Quindi $\operatorname{rank}(\Gamma_{\bar{m}}) = n$. □

Osservazione W.7.3.8. In base al Teorema W.7.3.3, se nel problema della realizzazione parziale minima degli $\bar{h}+1$ coefficienti di Markov $W_0, W_1, \dots W_{\bar{h}}$, con $\bar{h}$ pari, $\bar{h}$ è abbastanza grande, ovvero $a \triangleq \frac{\bar{h}}{2}$ è maggiore o uguale al grado $\bar{m}$ del polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ della matrice di trasferimento $\boldsymbol{W}(\lambda)$ del sistema che ha generato sperimentalmente tali coefficienti di Markov, allora il rango della matrice di Hankel Γ_a costruita con i dati coincide con l'ordine di una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$. D'altra parte, il Teorema W.7.3.2 stabilisce che, sempre nell'ipotesi di $\bar{h}$ pari, le (W.7.3.45) garantiscono che anche l'ordine di una realizzazione parziale minima di tali coefficienti di Markov (e, ovviamente, in particolare quella fornita dalla Procedura W.7.3.4) è pari al rango di $\Gamma_{\frac{\bar{h}}{2}}$, e anzi sono anche necessarie affinchè ciò avvenga. Ma le (W.7.3.45) sono a loro volta implicate dalla condizione $\operatorname{rank}(\Gamma_a) = \operatorname{rank}(\Gamma_{a+1})$, con $a \triangleq \frac{\bar{h}}{2}$, che in base al Teorema W.7.3.3 è sicuramente soddisfatta per valori di $a \geq \bar{m}$. Tutto ciò lascia facilmente intuire che se tale intero a è maggiore o uguale a $\bar{m}$, allora la realizzazione parziale minima è anche una realizzazione minima della $\boldsymbol{W}(\lambda)$ che ha generato i dati del problema (ed ha stato di dimensione pari al rango di Γ_a); ciò è effettivamente vero, ed è enunciato dal successivo Teorema W.7.3.4. Tuttavia, se $\bar{m}$, o almeno una sua stima per eccesso, non è noto a priori, resta impossibile avere la certezza che la realizzazione parziale minima individuata dai dati sia anche una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, come sarà più chiaro dalla discussione successiva al Teorema W.7.3.4. Ma da quanto ora discusso emerge che con le (W.7.3.45) si ha almeno una condizione necessaria affinché i dati $W_0, W_1, \dots W_{\bar{h}}$ (con $\bar{h}$ pari) siano caratterizzati da $\bar{h} \geq 2\bar{m}$, cioè siano in quantità sufficiente a garantire che una realizzazione parziale minima di essi sia anche una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, in virtù del già preannunciato Teorema W.7.3.4. □

Teorema W.7.3.4. *Siano $W_0, W_1, \dots, W_{\bar{h}}$, con $\bar{h}$ pari, i primi $\bar{h}+1$ coefficienti dello sviluppo* (7.3.5) *di una matrice di trasferimento razionale propria $\boldsymbol{W}(\lambda)$ il cui polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ ha grado $\bar{m}$. Se $\bar{h} \geq 2\bar{m}$, allora le condizioni* (W.7.3.45) *sono soddisfatte, e la Procedura W.7.3.4 fornisce una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$.*

Dimostrazione. Definendo (grazie all'ipotesi che $\bar{h}$ sia pari) $a \triangleq \dfrac{\bar{h}}{2} \geq \bar{m}$, per il Teorema W.7.3.3 Γ_a ha rango pari all'ordine n di una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$. Perciò se (A, B, C, D) è una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, per la (7.3.17) e la seconda disuguaglianza di Sylvester (7.3.14) si ha anche che $\operatorname{rank}(Q_a(A,C)) = n = \operatorname{rank}(P_a(A,B))$, e quindi la (7.3.18) implica le (W.7.3.45). Inoltre, se $\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\right)$ è la realizzazione parziale minima di W_0, $W_1, \ldots, W_{\bar{h}}$ fornita dalla Procedura W.7.3.4, grazie alla dimostrazione del Teorema W.7.3.2a) si può fattorizzare Γ_a, oltre che come nella (7.3.17), anche in modo del tutto simile, ma con $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ al posto di A, B, C, D, rispettivamente; e, grazie al fatto che $\operatorname{rank}(\Gamma_a) = n$, anche la realizzazione parziale minima $\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\right)$ è di ordine n come la realizzazione minima (A, B, C, D). Che $\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\right)$ sia anche una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ può quindi essere dimostrato facendo vedere che (A, B, C, D) e $\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\right)$ sono algebricamente equivalenti, con una dimostrazione del tutto simile a quella del Teorema 7.3.3 a pag. 423, con l'avvertenza di usare in essa Γ_a e Γ_a^+ al posto di Γ_n e Γ_n^+, rispettivamente, e di sfruttare la proprietà già dimostrata che $Q_a(A,C)$, $P_a(A,B)$, $Q_a(\bar{A},\bar{C})$ e $P_a(\bar{A},\bar{B})$ hanno rango n. □

Il Teorema W.7.3.4 fornisce la seguente risposta al problema di individuare una rappresentazione ingresso-stato-uscita di un sistema lineare e stazionario a tempo discreto (che abbia la stessa significatività che ha la realizzazione minima di una matrice di trasferimento razionale propria), a partire però da dati sperimentali (supposti idealmente privi di errori) rilevati *in un intervallo di tempo limitato*, costituiti da un numero finito di coefficienti di Markov W_0, $W_1, \ldots, W_{\bar{h}}$, cioè da un numero finito di valori $W(0)$, $W(1)$, $\ldots$, $W(\bar{h})$ della matrice delle risposte impulsive nell'uscita del sistema: è possibile ottenere una realizzazione minima della matrice di trasferimento $\boldsymbol{W}(\lambda)$ del sistema che ha generato i valori $W(0)$, $W(1)$, $\ldots$, $W(\bar{h})$ della matrice delle risposte impulsive nell'uscita a patto di conoscere *a priori* un limite superiore $\tilde{m}$ sul grado $\bar{m}$ del polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ (o sulla dimensione dello stato del sistema, che è sempre maggiore o uguale dell'ordine n di una realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, che a sua volta è sempre maggiore o uguale del grado $\bar{m}$ del polinomio minimo $q_{\boldsymbol{W}}(\lambda)$ di $\boldsymbol{W}(\lambda)$, come è facile capire), e a patto di scegliere $\bar{h} \geq 2\tilde{m}$.

Se non si conosce il suddetto limite superiore $\tilde{m}$, si potrebbe pensare di sfruttare la relazione

$$\operatorname{rank}(\Gamma_a) = n, \quad \forall a \geq \bar{m},\ a \in \mathbb{N}$$

(cfr Teorema W.7.3.3) per trovare il valore "giusto" di $\bar{h}$ ponendo $\bar{h} = 2b$, $b \in \mathbb{N}$, e incrementando b fino al verificarsi della condizione $\operatorname{rank}(\Gamma_b) = \operatorname{rank}(\Gamma_{b+1})$. Tale modo di procedere in realtà può condurre a risultati erronei, come mostrato dal controesempio $\boldsymbol{W}(\lambda) = 3 + \dfrac{1}{\lambda^6}$, per il quale $W_0 = 3$, $W_6 = 1$, $W_h = 0$

per $h \in \mathbb{N}$, $h \neq 6$, e

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

operando come suggerito, dal momento che $\mathrm{rank}(\Gamma_1) = \mathrm{rank}(\Gamma_2) = \mathrm{rank}(\Gamma_3)$, sembrerebbe possibile scegliere $\bar{h} = 2$ nell'applicazione della Procedura W.7.3.4, deducendo poi che la realizzazione minima cercata ha ordine $n = \mathrm{rank}(\Gamma_1) = 0$; in realtà, si ha $\mathrm{rank}(\Gamma_3) < \mathrm{rank}(\Gamma_4)$ e la realizzazione minima di $\boldsymbol{W}(\lambda)$ ha ordine 6. È facile poi generalizzare tale esempio in modo da mostrare che non è mai possibile, sulla base di un numero finito di dati W_h, sapere se $\mathrm{rank}(\Gamma_b) = \mathrm{rank}(\Gamma_a)$ per ogni $b \geq a$; ciò mostra la necessità di conoscere a priori il suddetto limite superiore $\tilde{m}$ al fine di ottenere una realizzazione minima a partire dalla sola conoscenza di una numero finito di W_h (nel modo enunziato dal Teorema W.7.3.4).